

Modèle scalaire des ondes lumineuses

Lors du cours sur les ondes électromagnétiques, nous nous étions la plupart du temps limité au cas très simplifié d'une onde plane progressive parfaitement monochromatique.

Comprendre les phénomènes optiques en termes ondulatoires demandera d'aller plus loin dans cette description :

- Quelle est l'onde émise par une source lumineuse réelle ?
- Qu'est-ce qu'un détecteur (œil, caméra...) perçoit de cette onde ?
- Quel est l'effet « d'obstacles » placés sur son chemin, par exemple une lentille ?

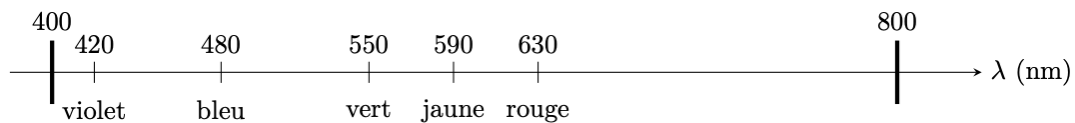
Répondre à ces questions permettra également de relier les théories apparemment disjointes de l'électromagnétisme et de l'optique géométrique.

Comme son nom l'indique, l'optique s'intéresse aux ondes électromagnétiques de longueur d'onde appartenant à un domaine restreint appelé domaine du visible.

La longueur d'onde dans le vide des ondes monochromatiques visibles est comprise entre 400 et 800 nm. La fréquence associée $\nu = c/\lambda$ est comprise entre $4 \cdot 10^{14}$ et $7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Une source de lumière blanche émet un spectre continu contenant toutes les longueurs d'ondes visibles.

À une longueur d'onde monochromatique est associée une couleur pure :



Cette correspondance entre couleur et longueur d'onde concerne les longueurs d'onde dans le vide.

L'œil est le plus sensible aux couleurs jaunes, ce qui correspond plus ou moins au maximum d'émission du spectre solaire. En revanche, il ne perçoit quasiment plus les couleurs au-delà de 750 nm.

1. Modèles pour l'émission et la réception de la lumière

1.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses

À l'exception de certains lasers, la lumière émise par toutes les sources rencontrées usuellement n'est pas polarisée, et la grande majorité des détecteurs optiques est insensible à la polarisation : dans tout le cours d'optique, cet aspect ne sera pas considéré.

Le modèle scalaire consiste à décrire l'onde lumineuse par un champ scalaire $s(M, t)$ appelé **onde scalaire**, **vibration scalaire** ou encore **vibration lumineuse**.

Qualitativement, la vibration scalaire est proportionnelle aux composantes du champ électrique de l'onde électromagnétique, mais décrire précisément ce facteur de proportionnalité ne sera pas nécessaire.

1.2. Émission lumineuse : modèle des trains d'ondes

En pratique, le spectre d'une onde lumineuse ne peut jamais être parfaitement pur, pas même celui d'un laser ou si l'on isole une raie à l'aide d'un filtre coloré. Ainsi, une onde lumineuse n'est jamais parfaitement sinusoïdale, c'est-à-dire que les paramètres de la sinusoïde (amplitude, fréquence, phase initiale) varient lentement au cours du temps. Logiquement, le temps caractéristique de ces variations lentes doit se retrouver sur le spectre.

Un exemple pour comprendre

Considérons un signal sinusoïdal amorti, par exemple une tension :

$$u(t) = U_0 \exp -t/\tau \cos(2\pi f_0 t)$$

Il ne s'agit pas d'un signal purement sinusoïdal, donc son spectre ne contient pas qu'une seule fréquence : il a une largeur intrinsèque non nulle Δf , centrée autour de la fréquence « principale » du signal f_0 . L'amplitude de la sinusoïde varie sur un temps caractéristique τ , et la largeur spectrale Δf est d'autant plus grande que τ est petit : en effet, le signal est alors « moins sinusoïdal », il est donc raisonnable que la largeur spectrale augmente.

Généralisation : l'analyse de Fourier permet de relier la largeur spectrale d'un signal (qualitativement l'écart entre les fréquences maximale et minimale de son spectre) et l'échelle de temps sur laquelle il varie : en ordre de grandeur, la largeur en fréquence Δf du spectre d'un signal est reliée à la durée caractéristique Δt des variations lentes par :

$$\Delta f \times \Delta t \sim 1$$

Temps et longueur de cohérence

On appelle temps de cohérence τ_c d'une source lumineuse le temps caractéristique de variation des propriétés de l'onde lumineuse.

Le temps de cohérence est relié à la largeur spectrale $\Delta \nu$ de la source par : $\tau_c \times \Delta \nu = 1$

On appelle longueur de cohérence (temporelle) la longueur définie par : $L_c = c \times \tau_c$

Ordres de grandeur :

Source	Laser	Raie spectrale	Lumière blanche
τ_c	10^{-8} à 10^{-9} s	10^{-10} à 10^{-11} s	10^{-15} s
L_c	1 m	1 cm	0,1 μm

Largeur en fréquence, largeur en longueur d'onde

En optique, l'usage est de décrire les spectres en longueur d'onde plutôt qu'en fréquence : il faut donc relier la largeur en longueur d'onde $\Delta \lambda$ à la largeur en fréquence $\Delta \nu$.

Considérons une raie de largeur en fréquence $\Delta \nu$ centrée sur la fréquence ν_0 . Compte tenu des ordres de grandeur classiques en optique, $\Delta \nu \ll \nu_0$.

Rappel : $f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$

La largeur en longueur d'onde s'obtient par un développement limité de la relation de dispersion autour de $\nu = \nu_0$:

$$\lambda\left(\nu_0 \pm \frac{\Delta\nu}{2}\right) = \lambda(\nu_0) \pm \frac{d\lambda}{d\nu}(\nu = \nu_0) \times \frac{\Delta\nu}{2}$$

donc :

$$\Delta\lambda = \lambda\left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}\right) - \lambda\left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right) = -\frac{d\lambda}{d\nu}(\nu = \nu_0) \Delta\nu$$

or d'après la relation de dispersion :

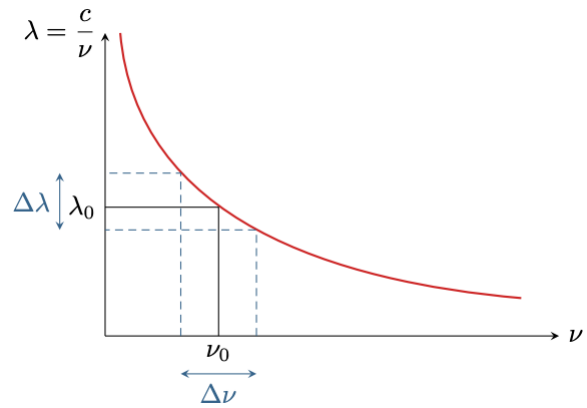
$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

d'où :

$$\frac{d\lambda}{d\nu}(\nu = \nu_0) = -\frac{c}{\nu_0^2}$$

On en déduit la largeur en longueur d'onde :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta\nu = \frac{\lambda_0^2}{c\tau_c}$$



La largeur en longueur d'onde d'une raie spectrale est reliée à sa largeur en fréquence et donc au temps de cohérence par le terme d'ordre 1 du développement limité de la relation de dispersion,

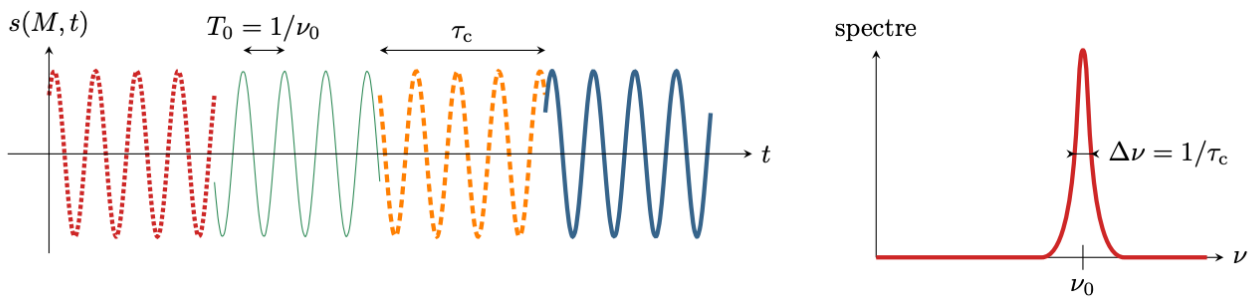
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta\nu = \frac{\lambda_0^2}{c\tau_c}$$

Modèle des trains d'onde

A priori, l'onde lumineuse est une onde presque harmonique, dont l'amplitude, la fréquence et la phase initiale peuvent varier de manière simultanée : de telles variations combinées ne peuvent pas être décrites mathématiquement de façon simple. Le modèle des trains d'onde est une simplification permettant de décrire efficacement une onde lumineuse. Il nous sera très utile pour des interprétations.

Une onde lumineuse est modélisée par une succession de **trains d'onde**, tous de même durée τ_c , pendant lesquels l'onde est parfaitement sinusoïdale.

Entre deux trains d'onde, la phase subit une discontinuité aléatoire, alors que l'amplitude et la fréquence restent inchangées.



Signal temporel et spectre d'une suite de trains d'ondes.

Un train d'onde compte en réalité plusieurs milliers, voire dizaines de milliers, de périodes de l'onde.

Application : Largeur d'une raie spectrale et temps de cohérence

La raie verte du mercure a une longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$ et une largeur $\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$ dans une lampe haute pression.

Déterminer son temps de cohérence.

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c\tau_c}$$

$$\tau_c = \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

En déduire le nombre de périodes que compte un train d'onde.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c} = 1,8 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

Un train d'onde compte $\tau_c/T = 27000$ périodes.

Ce modèle des trains d'onde permet également de donner une interprétation physique de la longueur de cohérence.

La longueur de cohérence d'une source lumineuse $L_c = c \times \tau_c$ correspond à la longueur dans le vide des trains d'onde qu'elle émet.

1.3. Capteurs optiques : éclairage

Temps de réponse des capteurs optiques et conséquence

Le temps de réponse d'un capteur est la durée caractéristique des variations les plus rapides qu'il puisse transcrire : par exemple, si un capteur a un temps de réponse de 1 ms , il ne peut pas percevoir des variations sur des durées de l'ordre de quelques microsecondes. Cet aspect est déterminant en optique.

Temps de réponse des capteurs optique : le temps de réponse τ_r d'un capteur dépend énormément du circuit électronique dans lequel le capteur est intégré, les valeurs données ici ne sont que des ordres de grandeur indicatifs.

Capteur	Œil	CCD	Photodiode
τ_r	0,1 s	10^{-4} s	10^{-8} s

La période T d'une onde optique étant de l'ordre de 10^{-14} s , aucun capteur n'est capable de suivre les variations instantanées du champ électromagnétique.

Le signal délivré par tout capteur optique est proportionnel à l'énergie accumulée sur le capteur pendant une durée de l'ordre de τ_r , autrement dit à la puissance moyenne reçue pendant τ_r .

En pratique, comme $\tau_r \gg T$, on considérera dans les calculs la limite $\tau_r \rightarrow \infty$.

On appelle **intensité lumineuse** \mathcal{J} ou **éclairage** \mathcal{E} en un point M d'un capteur ou d'un écran la puissance surfacique moyenne reçue en ce point.

Une intensité lumineuse s'exprime en $W \cdot m^{-2}$.

Le signal délivré par un capteur optique placé en un point M est proportionnel à l'éclairage en ce point.

Pour un élément de surface dS centré sur M recevant en moyenne la puissance $\langle d\mathcal{P} \rangle$, alors :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\langle d\mathcal{P} \rangle}{dS}$$

Éclairage et vibration lumineuse

La puissance transportée par une onde électromagnétique est reliée au flux du vecteur de Poynting. Pour une OPPM se propageant dans la direction \vec{u} , on a montré que :

$$\vec{B} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c}$$

donc :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \left(\vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c} \right) = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}$$

Ainsi l'éclairage s'exprime par :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\langle d\mathcal{P} \rangle}{dS} = \frac{\langle \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \rangle}{dS}$$

$$\mathcal{E}(M) \propto \langle E^2 \rangle$$

La vibration lumineuse s et le champ électrique E sont proportionnels, d'où :

$$\mathcal{E}(M) = K \langle s(M)^2 \rangle$$

Ces calculs peuvent être menés en représentation complexe : en effet,

$$\langle s^2 \rangle \geq \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{s} \underline{s}^*) = \frac{1}{2} | \underline{s} |^2$$

$$\mathcal{E}(M) = \frac{K}{2} | \underline{s}(M) |^2$$

Calculer un éclairage nécessite de calculer $\langle s(M)^2 \rangle$ ou de façon équivalente $| \underline{s}(M) |^2$.

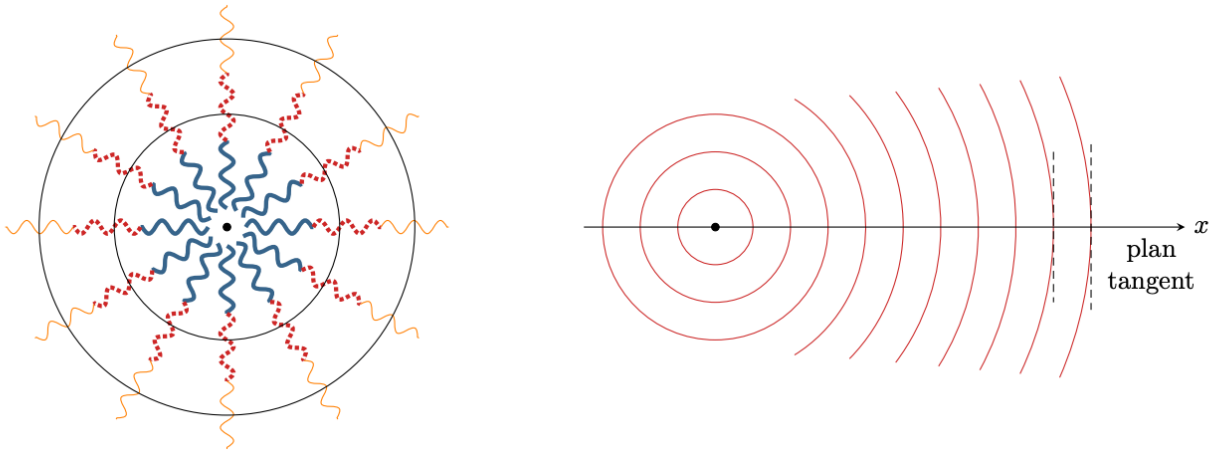
2. Optique géométrique et optique ondulatoire

2.1. Surfaces d'onde et rayons lumineux

Rappel : ondes sphériques et ondes planes

On appelle **surface d'onde** ou **front d'onde** une surface continue de l'espace sur laquelle la vibration lumineuse est uniforme à tout instant.

Si les surfaces d'onde sont des sphères concentriques, l'onde est dite **sphérique** ; s'il s'agit de plans parallèles elle est dite **plane**.



Émission d'une source ponctuelle.

Gauche : vision trains d'ondes (deux surfaces d'ondes sont représentées).

Droite : vision surfaces d'ondes.

Le rayonnement émis par une source ponctuelle est isotrope : les mêmes trains d'onde sont émis dans toutes les directions. Les surfaces d'onde sont alors des sphères. À grande distance de la source, la courbure de la sphère devient négligeable, si bien que les surfaces d'ondes peuvent être approximées par leur plan tangent.

Une source ponctuelle émet une onde sphérique, qui peut s'approximer par une onde plane à grande distance de la source.

Écriture mathématique d'une onde scalaire monochromatique :

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t \pm \phi(M)) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s}(M, t) = \underline{A}(M) \exp j(\omega t \pm \phi(M))$$

Le signe \pm est choisi par convention : dans ce cours, c'est plutôt le signe $-$ qui sera utilisé. Dans le cas général, l'amplitude A et la phase ϕ de l'onde scalaire peuvent dépendre du point M : il ne s'agit pas nécessairement d'une onde plane progressive.

Cas d'une onde plane progressive monochromatique :

En toute généralité, une OPPM s'écrit :

$$s(M, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s}(M, t) = \underline{A} \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})$$

La phase $\phi(M)$ d'une OPPM s'écrit donc :

$$\phi(M) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi$$

Remarque : Pour $\vec{k} = k \vec{e}_x$, on a $\phi(M) = kx + \varphi$.

Cas d'une onde plane progressive monochromatique :

Une onde sphérique s'écrit :

$$s(M, t) = s(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s}(M, t) = \frac{\underline{A}}{r} \exp j(\omega t - kr)$$

La phase $\phi(M)$ d'une onde sphérique s'écrit donc :

$$\phi(M) = kr + \varphi$$

Le facteur $1/r$ décrit physiquement l'étalement de l'énergie de l'onde sphérique dans tout l'espace : en supposant que la source émet une puissance lumineuse constante, alors c'est la même puissance qui traverse toutes les sphères de rayon r .

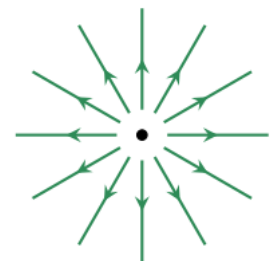
Ainsi, $\langle s(r)^2 \times 4\pi r^2 \rangle$ ne doit pas dépendre de r , d'où la décroissance de s en $1/r$.

Les surfaces d'onde des ondes monochromatiques sont donc également des **surfaces équiphasées** c'est-à-dire des surfaces sur laquelle la phase est uniforme.

Rayons lumineux

En optique géométrique :

Un rayon lumineux est une ligne le long de laquelle la lumière se propage. C'est une modélisation : on ne peut pas produire ni même isoler un seul rayon lumineux, mais seulement des faisceaux composés d'une infinité de rayons lumineux. Une source ponctuelle émet des rayons lumineux dans toutes les directions.



En électromagnétisme :

Dire que la lumière « se propage le long des rayons lumineux » signifie que l'énergie lumineuse (électromagnétique) suit les rayons lumineux.

Les rayons lumineux sont les lignes de champ du vecteur de Poynting en moyenne temporelle.

En particulier, il est possible de montrer que le vecteur de Poynting vérifie les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction à une interface entre deux milieux d'indices différents.

Théorème de Malus

En comparant les deux visions en surfaces d'onde et en rayons lumineux sur l'exemple de la source ponctuelle, on peut constater le résultat suivant, que l'on admettra mais qui est très général.

Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

Ce théorème est important sur le plan conceptuel mais aussi dans la pratique des calculs : c'est lui qui permet de faire le lien entre les modèles géométrique et ondulatoire de la lumière.

2.2. Déphasage propagatif et chemin optique

Indice optique

On appelle **indice optique** d'un milieu le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide c et la vitesse de la lumière dans ce milieu c' :

$$n = \frac{c}{c'} (> 1)$$

Lorsqu'une onde monochromatique passe du vide à un autre milieu, sa célérité change. La relation de dispersion implique alors que la fréquence et/ou la longueur d'onde doivent également être modifiées : en effet, $\omega = kc \neq kc'$ si $c' \neq c$. On admet :

La fréquence d'une onde est invariante par changement de milieu, mais le vecteur d'onde et la longueur d'onde sont modifiés.

L'invariance de la pulsation permet d'écrire les deux relations de dispersion sous la forme :

$$\omega = kc = k'c'$$

$$k' = \frac{c}{c'}k = nk$$

$$\lambda' = \lambda n$$

Chemin optique

On appelle chemin optique le long d'un rayon lumineux allant de A à B la quantité

$$(AB) = [AB] = \int_{\overline{AB}} n(M) dl$$

En pratique : on considérera souvent des milieux homogènes ($n = cte$), dans lesquels les rayons lumineux sont des droites. Dans ce cas,

$$(AB) = [AB] = n \int_{\overline{AB}} dl$$

$$(AB) = [AB] = nAB$$

Dans un milieu homogène, le chemin optique est simplement le produit de la distance géométrique par l'indice optique.

Lien entre phase et chemin optique

Considérons l'exemple d'une onde sphérique monochromatique se propageant dans un milieu d'indice n , pour laquelle la phase s'écrit :

$$\phi(M) = kr + \varphi$$

Cette phase peut s'exprimer en fonction du chemin optique parcouru depuis la source S située en $r = 0$:

$$kr = kSM = nk_0SM = k_0(SM) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM)$$

soit

$$\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi$$

où l'on indice 0 les grandeurs optiques dans le vide.

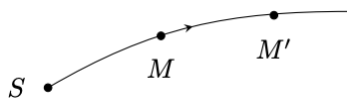
On admet que ce résultat se généralise à toute onde et tout type de milieu.

La phase d'une onde monochromatique est reliée au chemin optique parcouru depuis la source,

$$\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide et φ une phase initiale constante.

Conséquence : considérons deux points M et M' se trouvant sur un même rayon lumineux.



$$\phi(M') - \phi(M) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}(SM') + \varphi \right) - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(SM') - (SM)]$$

Comme M et M' sont sur le même rayon lumineux alors $(SM') = (SM) + (MM')$ d'après la relation de Chasles, ce qui donne finalement :

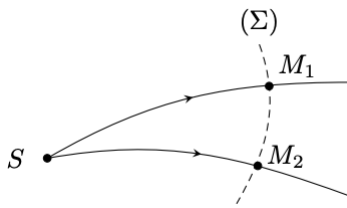
$$\phi(M') - \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(MM')$$

Le déphasage d'une onde entre deux points se trouvant sur un même rayon lumineux est relié au chemin optique entre ces deux points

$$\phi(M') - \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(MM')$$

Conséquence (bis) : Considérons maintenant deux points M_1 et M_2 appartenant à une même surface d'onde Σ , mais se trouvant sur deux rayons différents.

Comme les surfaces d'onde coïncident avec les surfaces équi-phases, on a :



$$\phi(M_1) = \phi(M_2)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}(SM_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM_2)$$

$$(SM_1) = (SM_2)$$

Les points M_1 et M_2 étant quelconques sur la surface d'onde Σ , on en conclut qu'il y a égalité des chemins optiques pour aller d'un point source S à tous les points d'une même surface d'onde Σ , quel que soit le rayon suivi :

$$\forall M \in \Sigma \quad (SM) = cte$$

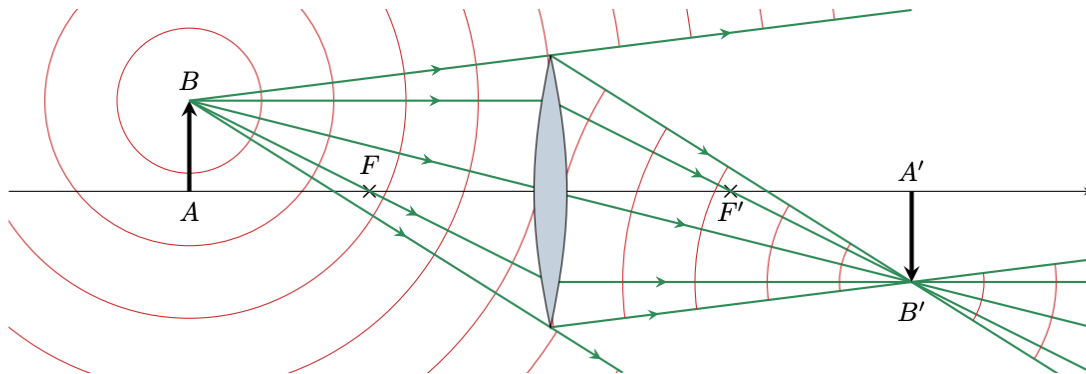
2.3. Effet d'une lentille convergente

En termes de rayons lumineux :

Une lentille dévie les rayons lumineux différemment selon leur point d'impact sur la lentille, ce qui les fait converger vers le point image B' .

En termes de surfaces d'onde :

Une lentille déforme les surfaces d'ondes de telle sorte qu'en sortie de la lentille toutes les surfaces d'onde convergent vers le point image B' en conséquence du théorème de Malus.



Effet d'une lentille sur une onde lumineuse

Conséquence : toutes les surfaces d'onde issues de B convergent en B' .

Bien que plusieurs rayons différents amènent de B à B' , le chemin optique sera le même quel que soit le rayon lumineux suivi.

Interprétation : par rapport à un rayon extrême, le rayon lumineux passant par le centre optique de la lentille parcourt une distance géométrique plus courte, mais la distance parcourue dans le verre (d'indice plus élevé) est plus longue ce qui rallonge d'autant le chemin optique.

Le chemin optique entre deux points conjugués par un système optique parfaitement stigmatique est indépendant du rayon lumineux suivi.

Application : Phases et propagation

Un point source S est placé au foyer objet d'une lentille convergente. Une lame d'indice n et d'épaisseur e est placée à une distance d de la lentille et recouvre la moitié du faisceau. On prendra l'indice de l'air égal à 1.

1. Tracer quelques rayons lumineux et quelques surfaces d'onde dans le dispositif.
2. On prend comme référence de phase $\phi(A) = 0$. Déterminer la phase au niveau des autres points de la figure.

Les points A et A' appartiennent à la même surface d'onde donc $\phi(A) = \phi(A') = 0$

B et B' appartiennent aussi à la même surface d'onde avec propagation sur une distance d donc

$$\phi(B) = \phi(B') = \frac{2\pi}{\lambda_0} d$$

En revanche attention C et C' NE SONT PAS sur la même surface d'onde car l'indice du milieu n'est pas le même, on a :

$$\phi(C) = \phi(B) + \frac{2\pi}{\lambda_0} ne = \frac{2\pi}{\lambda_0} (d + ne)$$

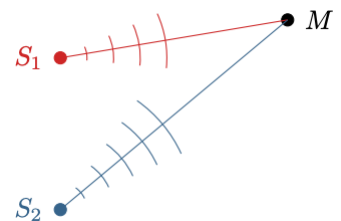
$$\phi(C') = \phi(B') + \frac{2\pi}{\lambda_0} e = \frac{2\pi}{\lambda_0} (d + e)$$

3. Superposition de deux ondes

3.1. Formule de Fresnel et critères de cohérence

Considérons deux sources ponctuelles S_1 et S_2 émettant chacune une onde monochromatique dans un milieu homogène.

Ces deux ondes se superposent dans tout l'espace, et on étudie l'éclairement résultant en un point M .



$$s_1(M, t) = A_1 \cos \left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} (S_1 M) - \varphi_1 \right) = A_1 \cos \psi_1(M, t)$$

$$s_2(M, t) = A_2 \cos \left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} (S_2 M) - \varphi_2 \right) = A_2 \cos \psi_2(M, t)$$

Pour alléger les écritures, on utilise ici la **phase instantanée** : $\psi(M, t) = \omega t - \phi(M)$.

D'après le principe de superposition, $s = s_1 + s_2$, mais ce n'est pas forcément le cas pour l'éclairement, car il est non linéaire : il y a des situations pour lesquelles $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$.

On dit qu'il y a **interférences entre deux ondes** lorsque l'éclairement issu de la superposition de ces deux ondes n'est pas égal à la somme des éclairements de chaque onde individuelle.

Deux ondes pouvant interférer sont dites **cohérentes**.

3.1.1. Calcul de l'éclairement résultant

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(M) &= \langle s(M, t)^2 \rangle = \langle (s_1(M, t) + s_2(M, t))^2 \rangle \\
 &= \langle \mathcal{E}(M) = \langle s_1^2 + s_2^2 + 2s_1s_2 \rangle \\
 &= \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2A_1A_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \\
 &= \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2A_1A_2 \times \frac{1}{2} \langle \cos(\psi_1 + \psi_2) + \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle
 \end{aligned}$$

Par définition, les éclairements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 produits par chacune des sources lorsqu'elles sont seules :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_1 &= \langle s_1^2 \rangle = \langle A_1^2 \cos^2 \psi_1(M, t) \rangle = \frac{A_1^2}{2} \\
 \mathcal{E}_2 &= \langle s_2^2 \rangle = \langle A_2^2 \cos^2 \psi_2(M, t) \rangle = \frac{A_2^2}{2}
 \end{aligned}$$

ce qui permet ensuite d'identifier $A_1A_2 = \sqrt{4\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} = 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}$.

Conclusion :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \langle \cos(\psi_1 + \psi_2) + \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle$$

Terme d'interférences

3.1.2. Étude du terme d'interférences

Terme somme

Valeur instantanée :

$$\begin{aligned}
 \psi_1 + \psi_2 &= \left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} (S_1 M) - \varphi_1 \right) + \left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} (S_2 M) - \varphi_2 \right) \\
 \psi_1 + \psi_2 &= (\omega_1 + \omega_2)t - \left[\frac{2\pi}{\lambda_1} (S_1 M) + \frac{2\pi}{\lambda_2} (S_2 M) + \varphi_1 + \varphi_2 \right]
 \end{aligned}$$

En moyenne temporelle :

Comme $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ on a évidemment $\langle \cos(\psi_1 + \psi_2) \rangle = 0$.

Terme différence

Valeur instantanée :

$$\begin{aligned}
 \psi_1 - \psi_2 &= \left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} (S_1 M) - \varphi_1 \right) - \left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} (S_2 M) - \varphi_2 \right) \\
 \psi_1 - \psi_2 &= (\omega_1 - \omega_2)t - \left[\frac{2\pi}{\lambda_1} (S_1 M) - \frac{2\pi}{\lambda_2} (S_2 M) + \varphi_1 - \varphi_2 \right] \\
 &= -\Delta\phi(M)
 \end{aligned}$$

En moyenne temporelle :

Si $\omega_1 - \omega_2 \neq 0$ on a évidemment $\langle \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle = 0$, mais si $\omega_1 - \omega_2 = 0$ alors $\psi_1 - \psi_2$ prend une valeur constante, indépendante du temps et dans ce cas $\langle \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle \neq 0$.

Pour que deux ondes puissent interférer, il faut qu'elles soient **synchrone**s, c'est-à-dire de même pulsation et donc de même longueur d'onde.

Lorsque cette hypothèse est vérifiée, on a alors

$$\langle \cos(\psi_1 + \psi_2) + \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle = \langle \cos \Delta\phi(M) \rangle$$

ainsi

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \langle \cos \Delta\phi(M) \rangle$$

avec le déphasage qui vaut

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} [(S_2M) - (S_1M) + \varphi_2 - \varphi_1]$$

Or dans une onde réelle la phase initiale varie de manière aléatoire et discontinue entre chaque train d'onde, c'est-à-dire toutes les 10^{-10} s, soit beaucoup moins que le temps de réponse du photorécepteur utilisé.

En moyenne $\langle \cos \Delta\phi(M) \rangle = 0$ sauf si $\varphi_1 = \varphi_2$.

Pour que deux ondes puissent interférer, il faut que le déphasage entre elles soit constant, c'est-à-dire en pratique qu'elles appartiennent au même train d'onde.

Cette contrainte sur le train d'onde est extrêmement restrictive : comme les sauts de phase sont aléatoires entre deux trains d'onde sont aléatoires, elle ne peut pas être atteinte avec deux sources physiquement différentes.

Les critères de cohérence ne peuvent pas être respectés par deux sources physiquement différentes. Pour qu'il y ait interférences, il faut que les ondes superposées soient issues de la même source primaire mais aient suivi deux chemins différents pour atteindre le point d'observation.

Pour observer des interférences, il faut diviser l'**onde primaire**, pour former deux **ondes secondaires** qui vont interférer.

3.1.3. Conclusion

Deux ondes sont **cohérentes** si elles sont de même fréquence et qu'elles proviennent du même train d'onde, ce qui impose qu'elles soient issues de la même source physique et aient suivi deux chemins différents pour atteindre le point M d'observation.

L'éclairement issu de la superposition de deux ondes cohérentes est donné par la **formule de Fresnel**,

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \cos \Delta\phi(M) \quad (\text{Ondes cohérentes})$$

Si ces critères ne sont pas vérifiés, le terme d'interférences est nul : l'éclairement résultant de la superposition de deux ondes incohérentes est la somme des éclaircements dus à chaque onde,

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (\text{Ondes incohérentes})$$

Cas particulier : on fait très souvent l'hypothèse que les deux sources lumineuses produisent le même éclairement individuel : $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0$, auquel cas :

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos \Delta\phi)$$

Un **interféromètre** est un dispositif permettant de diviser et recombinaer les trains d'onde en vue d'observer les interférences.

On les classe en deux catégories :

- interféromètres par **division du front d'onde** : une source ponctuelle émet les mêmes trains d'onde de manière isotrope, et certains au moins sont déviés par un miroir ou grâce au phénomène de diffraction, ce qui permet de les superposer.
- interféromètres par **division d'amplitude** : un train d'onde est envoyé sur un dispositif semi-réfléchissant qui le transmet et le réfléchit partiellement, le trajet des trains d'onde est ensuite contrôlé (miroirs, fibre optique...) pour superposer la fraction transmise et la fraction réfléchie.

3.2. Démonstration de la formule de Fresnel dans un sujet de concours

La démonstration générale étant longue et lourde, lorsqu'il est demandé dans un sujet d'établir la formule de Fresnel, le plus fréquent pour alléger les calculs est de supposer dès le début les conditions d'interférences remplies.

Par exemple, l'enchaînement des questions peut être :

- Rappeler à quelles conditions deux ondes s_1 et s_2 peuvent interférer.
- En supposant ces conditions remplies, établir l'expression de l'éclairement \mathcal{E} issu de la superposition de s_1 et s_2 .

Les ondes se superposant étant par hypothèse cohérentes, elles ont même pulsation, même longueur d'onde et même phase initiale :

$$s_1(M, t) = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(S_1M) - \varphi\right)$$

$$s_2(M, t) = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M) - \varphi\right)$$

Les mêmes étapes de calcul que précédemment deviennent alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle \\ &= \langle s_1^2 + s_2^2 + 2s_1s_2 \rangle \\ &= \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2A_1A_2 \left\langle \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(S_1M) - \varphi\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M) - \varphi\right) \right\rangle \\ &= \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle \\ &\quad + 2A_1A_2 \times \frac{1}{2} \left\langle \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}[(S_1M) + (S_2M)] - 2\varphi\right) + \cos\left(0 + \frac{2\pi}{\lambda}[(S_2M) - (S_1M)] + 0\right) \right\rangle \end{aligned}$$

ce qui permet ensuite d'identifier $A_1A_2 = 2\sqrt{\langle s_1^2 \rangle \langle s_2^2 \rangle} = 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}$

et $\langle \cos(2\omega t + cte) \rangle = 0$ ce qui permet de conclure :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}[(S_2M) - (S_1M)]\right) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos \Delta\phi(M)$$

►► **Pour approfondir** : La formule de Fresnel peut également se démontrer avec les représentations complexes, c'est même sans doute la méthode la plus rapide. Attention néanmoins au facteur 1/2 qui intervient dans la définition de l'éclairement. Supposons que les ondes s_1 et s_2 vérifient les critères de cohérence, et posons

$$\underline{s}_1 = A_1 \exp i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (S_1 M) \right) \quad \text{et} \quad \underline{s}_2 = A_2 \exp i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M) \right).$$

Alors,

$$\mathcal{E}(M) = \frac{1}{2} |\underline{s}|^2 = \frac{1}{2} |\underline{s}_1 + \underline{s}_2|^2 = \frac{1}{2} (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)(\underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*) = \frac{1}{2} |\underline{s}_1|^2 + \frac{1}{2} |\underline{s}_2|^2 + \operatorname{Re}(\underline{s}_1 \underline{s}_2^*)$$

Le terme d'interférences s'écrit alors

$$\underline{s}_1 \underline{s}_2^* = A_1 A_2 \exp i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (S_1 M) - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M) \right) = A_1 A_2 \exp \left(\frac{2i\pi}{\lambda} [(S_2 M) - (S_1 M)] \right)$$

et en prenant la partie réelle

$$\operatorname{Re}(\underline{s}_1 \underline{s}_2^*) = A_1 A_2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} [(S_2 M) - (S_1 M)] \right).$$

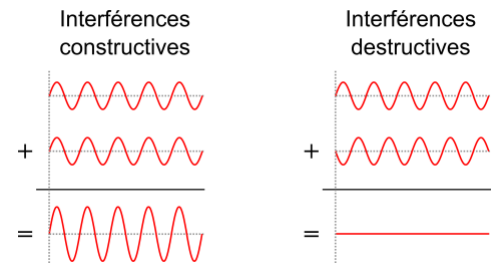
En reliant les amplitudes à la racine de l'éclairement comme précédemment, on obtient

$$\operatorname{Re}(\underline{s}_1 \underline{s}_2^*) = 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} [(S_2 M) - (S_1 M)] \right).$$

On retrouve alors la formule de Fresnel.

3.3. Conditions d'interférences constructives et destructives

Lorsque l'on superpose des ondes en phase, l'onde résultante est d'amplitude doublée alors que lorsque l'on superpose des ondes en opposition de phase, l'onde résultante est d'amplitude nulle.



Les interférences en un point M sont dites **constructives** si l'éclairement y est maximal, c'est-à-dire si les ondes y sont en phase : $\cos \Delta\phi(M) = 1$.

Réciproquement, elles sont dites **destructives** si l'éclairement y est minimal (aucune lumière reçue), c'est-à-dire si les ondes y sont en opposition de phase : $\cos \Delta\phi(M) = -1$.

Outre le déphasage, l'état d'interférence peut être formulé en termes de deux autres grandeurs équivalentes :

- la différence de marche $\delta = (S_2 M) - (S_1 M)$;
- l'ordre d'interférence $p = \delta/\lambda$. Ces grandeurs contiennent exactement la même information physique que le déphasage, puisque $\Delta\phi = 2\pi \delta/\lambda = 2\pi p$.

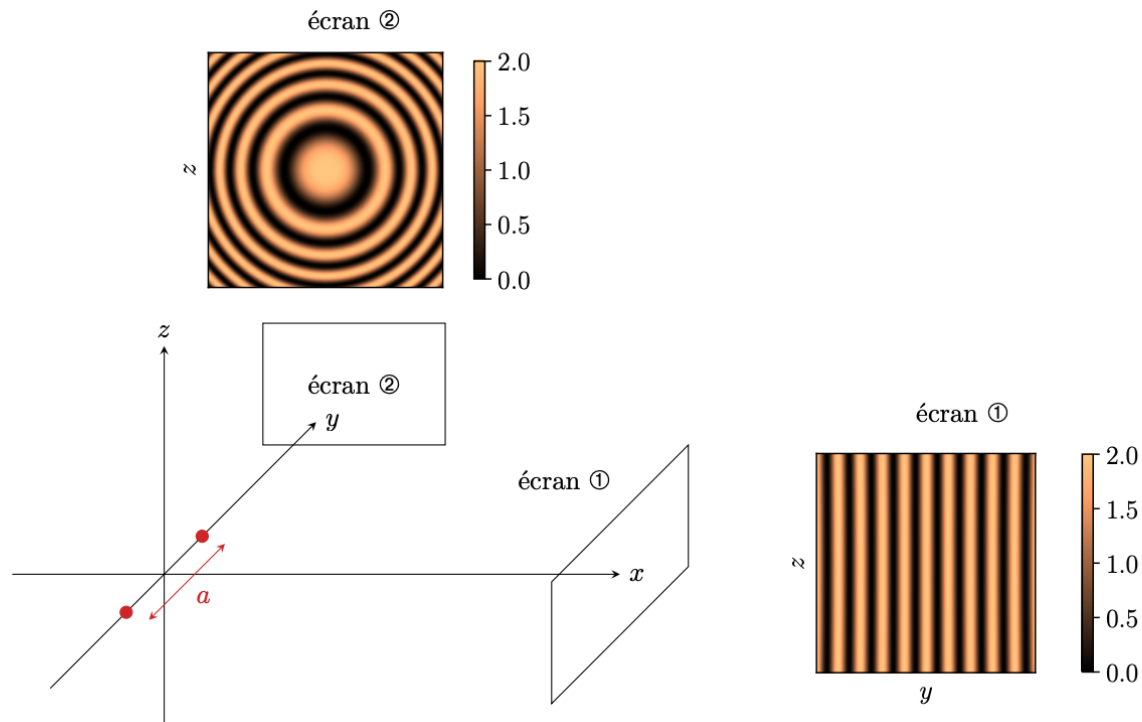
	Déphasage $\Delta\phi$	Différence de marche δ	Ordre d'interférence p
Définition	$\Delta\phi = \phi_2(M) - \phi_1(M)$	$\delta = (S_2 M) - (S_1 M)$	$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{2\pi}$
Fresnel	$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\Delta\phi)$	$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)$	$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(2\pi p)$
Interférences constructives	$\Delta\phi = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$	$\delta = m\lambda, m \in \mathbb{Z}$	$p = m \in \mathbb{Z}$ (ordre entier)
Interférences destructives	$\Delta\phi = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$	$\delta = \frac{\lambda}{2} + m\lambda, m \in \mathbb{Z}$	$p = m + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ (ordre entier)

4. Allure des figures d'interférences

En pratique, l'état d'interférences varie en fonction du point de l'écran si bien qu'on observe une succession de zones sombres et brillantes appelées franges d'interférences. L'ensemble des franges d'interférences forme la figure d'interférences. L'objectif de ce dernier paragraphe est de présenter sans calcul ou presque la phénoménologie des figures d'interférences que nous retrouverons dans les deux chapitres suivants.

4.1. Franges rectilignes et anneaux

Considérons deux sources ponctuelles identiques (c'est-à-dire qui émettent exactement la même onde), parfaitement monochromatiques, distantes de a le long d'un axe (Oy). On imagine placer un écran perpendiculairement à la feuille (le plan de l'écran contient l'axe z) dans les deux positions.



Allure de la figure d'interférences en fonction de la position de l'écran.

Écran ① placé dans un plan parallèle à l'axe des sources :

Les franges d'interférence sont des bandes rectilignes, parallèles à l'axe (Oz).

Interprétation :

Au voisinage du centre de l'écran ($y = 0$), les sources sont vues de manière quasiment invariante par translation le long de l'axe (Oz), la différence de marche est donc indépendante de z , il en est de même pour l'éclairement, et les franges d'interférences sont des bandes parallèles à l'axe (Oz).

Écran ② placé dans un plan perpendiculaire à l'axe des sources :

Les franges d'interférences sont des anneaux concentriques d'axe (Oy).

Interprétation :

Les sources sont vues de manière invariante par rotation autour de l'axe (Oy), donc la différence de marche ne dépend pas de la coordonnée angulaire de rotation autour de cet axe, il en est de même pour l'éclairement, et les franges d'interférences sont des anneaux concentriques.

4.2. Contraste

On appelle **contraste** C ou **visibilité** V d'une figure d'interférences :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}}$$

Il s'agit d'un nombre compris entre 0 et 1.

Réécrivons la formule de Fresnel dans le cas d'un contraste uniforme sur l'ensemble de la figure d'interférences, mais imparfait, c'est-à-dire différent de 1.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min} = 4\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \\ \mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min} = 2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad C = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}}{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}$$

Cette expression du contraste permet de réécrire la formule de Fresnel sous la forme :

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)(1 + C \cos \Delta\varphi)$$

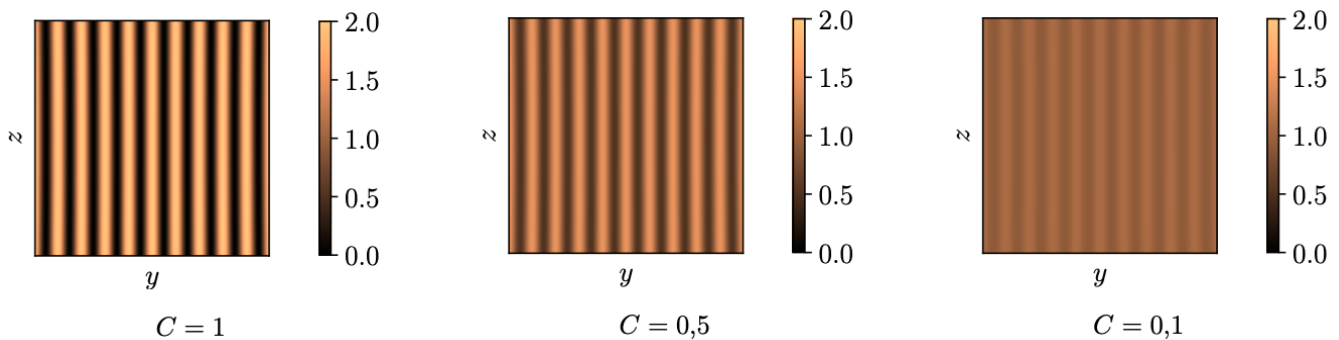


Figure d'interférences en fonction du contraste.

En pratique :

Plus le contraste est élevé, plus l'éclairement varie entre franges sombres et brillantes.

Le contraste permet de quantifier la perception visuelle que l'on a du phénomène d'interférences. Une figure d'interférences mal contrastée est dite **brouillée**.

Attention !

Ne pas confondre brouillage et interférences destructives : un contraste nul correspond à un éclairement uniforme, mais non nul, sur l'écran.

Effet d'une différence d'éclairement des sources

Le contraste peut s'écrire :

$$C = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}}{(1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1)}$$

On peut aisément montrer que la fonction :

$$x \rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

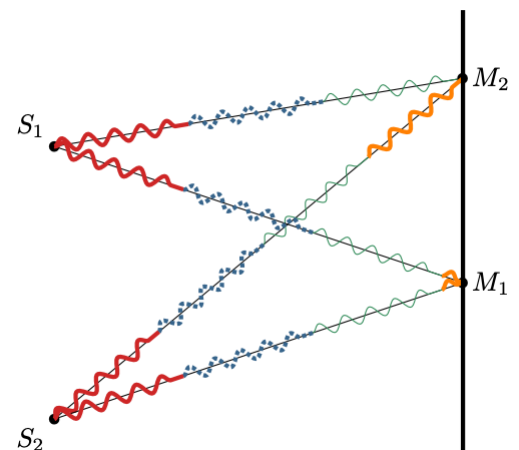
est nulle en $x = 0$ et en $x \rightarrow \infty$ (ce qui signifie concrètement que si l'un des deux éclairagements s'annule, il n'y a plus d'interférences...) et elle est maximale en $x = 1$.

Pour qu'une figure d'interférences soit bien contrastée, les deux sources doivent produire le même éclairement.

Cohérence temporelle et trains d'onde

Considérons désormais que les deux sources S_1 et S_2 sont toujours identiques, mais plus strictement monochromatiques : elles émettent une succession de trains d'onde.

- Au point M_1 , sur la médiatrice des deux sources : c'est toujours le même train d'onde qui se superpose à lui-même, les interférences sont donc bien contrastées.
- Au point M_2 , très excentré : la différence de marche est tellement grande que ce sont deux trains d'ondes différents qui se superposent. Leur déphasage étant par définition aléatoire, cela ne donne pas lieu à des interférences observables.



Dès que la différence de marche devient supérieure ou de l'ordre de la longueur L_c d'un train d'onde (longueur de cohérence de la source), les interférences ne sont plus observables.

En pratique : l'effet est progressif sur une longueur caractéristique L_c , le modèle des trains d'onde est rudimentaire :

- si $\delta(M) \ll L_c$ alors la figure d'interférences sera bien contrastée autour du point M ;
- si $\delta(M) \gg L_c$ alors la figure d'interférences sera peu contrastée autour du point M .

Pour une source réelle, légèrement polychromatique, il y a une perte progressive de contraste lorsque la différence de marche augmente : l'éclairement tend à devenir uniforme sur l'écran. On parle de perte de cohérence **temporelle**.

Pour observer des interférences bien contrastées avec une source réelle, les différences de marche doivent rester suffisamment faibles.

Cohérence spatiale et extension de la source

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que le cas de sources ponctuelles ... ce qui est loin de décrire une source réelle, qui mesure au minimum quelques millimètres.

Une source étendue se modélise comme une juxtaposition de sources ponctuelles incohérentes.

Les ondes issues de deux points voisins ne peuvent pas interférer : l'éclairement total est simplement la somme des éclairements issus de chaque point de la source.

Ce modèle peut se comprendre qualitativement : les photons émis par deux points voisins de la source n'ont pas été émis par les mêmes atomes, mais les atomes « ne se parlent pas », donc les phases des trains d'onde produits par des atomes voisins de la source ne peuvent pas être corrélées.

Remarque : de tels mécanismes de synchronisation entre trains d'ondes existent en fait dans les lasers.

Comme les points sources sont légèrement décalés les uns par rapport aux autres sur la source étendue, alors les franges brillantes et sombres produites par chaque point source sont légèrement décalées les unes par rapport aux autres, ce qui peut finalement conduire à un brouillage bien que la figure d'interférence soit globalement plus lumineuse.

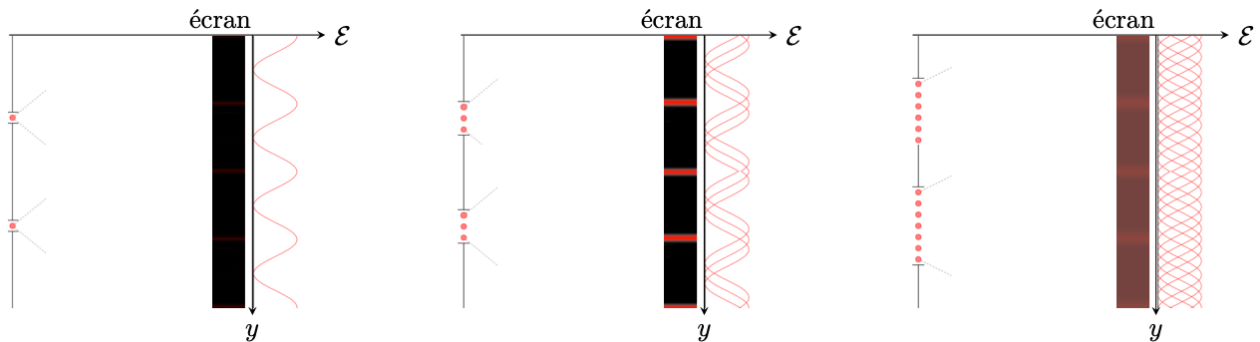


Figure d'interférences produite par une source étendue.

Utiliser une source spatialement étendue rend la figure d'interférences plus lumineuse mais peut conduire à une perte de contraste en tout point de la figure d'interférence. On parle de perte de **cohérence spatiale**.