Chapitre 6 : Equations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Une équation est dite différentielle lorsqu'il s'agit d'une équation faisant intervenir les dérivées d'une fonction « y » à déterminer.

Elle est dite du premier ordre lorsque parmi les dérivées, seule la dérivée première intervient.

Dans tout le chapitre, on désigne par K, le corps des réels ou des complexes.

I. Généralités

Soit I un intervalle de ℝ, b: $I \to K$ une application continue, J un intervalle de ℝ tel que J soit inclus dans I, et y : $J \to K$ une application

On dit que y est solution sur J de l'équation différentielle (E)du premier ordre : y'+ay = b

Si et seulement si y est dérivable sur J et : $\forall x \in J, y'(x) + ay(x) = b(x)$

Lorsque l'application a est constante comme ici, on parle d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

A chaque équation (E), on peut associer une équation (E_0) dite équation homogène à (E) définie par : y'+ay = 0

Résoudre (E), c'est déterminer pour chaque intervalle J⊂I, l'ensemble des solutions de (E) sur J.

II. Résolution

1) Résolution de (E_0)

Soit S_0 l'ensemble des solutions de E_0 sur I, alors $S_0 = \{I \to K, x \to \lambda e^{-ax};\ \lambda \in K\}$

Démonstration : Puisque a est constante, a admet des primitives dont l'expression est ax +cste

Pour y : I→ K dérivable, on définit z par : z(x) = $e^{ax}y(x)$ (clairement z est dérivable)

Pour tout x de I : y'(x) = -a$e^{-ax}z(x) + e^{-ax}z'(x)$

Ainsi : $y \in S_0 \Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x)+ay(x) = 0$

$\Leftrightarrow -ae^{-ax}z(x) + e^{-ax}z'(x) + ae^{-ax}z(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{-ax}z'(x) = 0$

$\Leftrightarrow z' = 0$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in K, \forall x \in I, z(x) = \lambda$

Finalement: $S_0 = \{I \to K, x \to \lambda e^{-ax};\ \lambda \in K\}$

<u>Exercice</u> : Résoudre y' – 4y = 0

Il s'agit d'une équation différentielle homogène du premier ordre à coefficient constant dont les solutions sont : y(x) = λe^{4x} avec $\lambda \in K$

Remarque : La démonstration précédente reste valable avec a non constante, et alors : $S_0 = \{I \to K, x \to \lambda e^{-\int a(x)dx};\ \lambda \in K\}$

Que penser de la résolution : y'=ay⟺ $\frac{dy}{dt} = ay$?
Donc $\frac{dy}{y} = adt$
Et ln(y)=at+cste
Soit y=$e^{at+cste} = \mathrm{A}e^{at}$

Alors…
On divise par y sans s'assurer du fait que y pourrait potentiellement s'annuler.
On intègre en ln(y) alors qu'il s'agit de ln$|y|$
Enfin la constant finale A devrait être toujours strictement positive…

2) Résolution « théorique » de (E)
   a) Lien entre (E) et (E_0) **:**$\forall \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} \in \mathbf{S_0}$
   Démonstration :
   On a : $y_1' + ay_1 = b$ et $y_2' + ay_2 = b$, donc $y_1' - y_2' + ay_1 - ay_2 = b - b$…

   b) On a :$\forall \boldsymbol{y_1} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{y_0} \in \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_0} \in \mathbf{S}$
   Ainsi, si S n'est pas vide, alors S est une droite affine dont la direction est la droite vectorielle S_0, on a : S = $\{y_1 + y_0;\ y_0 \in S_0\}$
   Autrement dit : La « solution générale » de (E) est la somme d'une « solution particulière » de (E) et de la « solution générale » de (E_0)

   Démonstration : de la même façon que le a)

Conséquence importante :
Pour résoudre notre équation différentielle, il suffira de résoudre l'équation différentielle linéaire associée puis de déterminer une solution particulière.

   c) Superposition des solutions
   On résout d'abord (E_0) puis on détermine une solution particulière de (E)
   Pour l'obtention de la solution particulière de (E), il se peut que la solution soit « évidente ».
   Il se peut aussi que le second membre b se décompose en une combinaison linéaire de plusieurs fonctions : b = $\sum_{k=1}^{n} b_k$
   On détermine alors une solution particulière pour chaque équation (E_k) : y_k, puis $\sum_{k=1}^{n} y_k$ fournit une solution particulière de (E)
   En effet : $(\sum_{k=1}^{n} y_k)' + a(\sum_{k=1}^{n} y_k) = \sum_{k=1}^{n}(y_k' + ay_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k = b$

   Ce principe est appelé le « principe de superposition des solutions »

3) Avec des seconds membres particuliers…
   a) Second membre de la forme x→P(x)$e^{\lambda x}$
   On peut chercher une solution de même type que le second membre, c'est-à-dire de la forme x→Q(x)$e^{\lambda x}$ avec Q une fonction polynomiale.

   <u>Exercice :</u>
   Résoudre l'équation (E_1) : $y' + 2y = e^{2x} + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

   Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $y' + y = x^2 e^{x}$ sur $\mathbb{R}$

Pour (E_1), on va utiliser le principe de superposition des solutions.

-On résout d'abord l'équation homogène associée : $y' + 2y = 0$ qui a pour solution $\boldsymbol{y(x) = \lambda e^{-2x}}$ **avec** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

-On cherche une solution particulière de (E_1') : $y' + 2y = e^{2x}$,
Une solution particulière y_0 est de la forme $y_0(x) = P(x)\, e^{2x}$,
De $y_0' + 2y_0 = e^{2x} \Leftrightarrow P'(x)\, e^{2x} + 2\, P(x)\, e^{2x} + 2\, P(x)\, e^{2x} = e^{2x}$,
Soit : $P'(x)+4P(x) = 1$
P est donc de degré 0, c'est une constante et $P(x) = \frac{1}{4}$
D'où comme solution particulière : $\boldsymbol{y_0(x) = \frac{1}{4} e^{2x}}$ (*Remarque les solutions de (E_1') :* $x \longrightarrow \frac{1}{4} e^{2x} + \lambda e^{-2x}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$)

- On cherche une solution particulière de (E_1'') : $y' + 2y = e^{-x}$
Une solution particulière y_0 est de la forme $y_0(x) = P(x)\, e^{-x}$,
De $y_0' + 2y_0 = e^{-x} \Leftrightarrow P'(x)\, e^{-x} - P(x)\, e^{-x} + 2\, P(x)\, e^{-x} = e^{-x}$
Soit : $P'(x)+P(x) = 1$
P est donc de degré 1, c'est une constante, $P(x) = 1$
D'où comme solution particulière : $\boldsymbol{y_0(x) = e^{-x}}$

-Finalement, les solutions de (E_1) : $\boldsymbol{y(x) = \frac{1}{4} e^{2x} + e^{-x} + \lambda e^{-2x}}$ **avec** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

Pour : (E_2) : $y' + y = x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$
-On résout l'équation homogène associée : $y'+y = 0$ qui a pour solution
$\boldsymbol{y(x) = \lambda e^{-x}}$ **avec** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

-On cherche une solution particulière sous la forme : $y_0(x) = P(x)e^x$ avec P polynôme réel.
On a : $y_0' + y_0 = x^2 e^x \Leftrightarrow P'(x)e^x + P(x)e^x + P(x)e^x = x^2 e^x$
Soit : $P'(x) + 2P(x) = x^2$, P est donc de degré 2, on peut le chercher sous la forme $P(x) = ax^2+bx+c$
$P'(x) + 2P(x) = x^2 \Leftrightarrow 2ax+b + 2ax^2+2bx+2c = x^2 \Leftrightarrow (2a-1)x^2+(2a+2b)x+(b+2c) = 0$
Par identification: $\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{cases}$
D'où: $\boldsymbol{y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})e^x}$

Finalement (E_2) a pour solutions : $\boldsymbol{y(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})e^x + \lambda e^{-x}}$ **avec** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

b) Second membre avec des fonctions circulaires
Etude d'un exemple, on souhaite résoudre l'équation différentielle $y' + y = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
<u>Première possibilité</u> : On cherche une solution particulière de la forme : Acos+Bsin avec A et B réels
-on résout l'équation homogène associée : $y'+y = 0$ qui a pour solution
$\boldsymbol{y = \lambda e^{-x}}$ **avec** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

-on cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = A\cos(x)+B\sin(x)$

On a : $y_0' + y_0 = \cos(x) \Leftrightarrow -A\sin(x)+B\cos(x)+A\cos(x)+B\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow (B-A)\sin(x) + (A+B-1)\cos(x) = 0$

Soit pour x=0 : A+B -1 = 0 et pour $x=\frac{\pi}{2}$, B-A = 0

D'où : A=B = ½

Et : $\mathbf{y_0(x) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))}$

Finalement les solutions de l'équation sont : $y(x) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x)) + \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

<u>Deuxième possibilité</u> : on bascule en complexe

On résout $y'+y = e^{ix}$

Et on conserve la partie réelle des solutions…

-L'équation homogène a toujours pour solution : **$y = \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$**

-On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = P(x)\, e^{ix}$ avec P polynôme complexe

On a : $P'(x)\, e^{ix} + i\, P(x)\, e^{ix} + P(x)\, e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow P'(x)+(1+i)P(x) = 1$

Donc P est de degré 0, c'est une constante et $P(x) = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$

Soit : $\mathbf{y_0(x) = \frac{1-i}{2} e^{ix}}$

Et les solutions de l'équation différentielle complexe : $y(x) = \frac{1-i}{2} e^{ix} + \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit : $y(x) = \frac{1-i}{2}(\cos(x)+i\sin(x)) + \lambda e^{-x} = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))+\frac{i}{2}(\sin(x)-\cos(x))+ \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Et les solutions de l'équation différentielle initiale : $y(x) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x)) + \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Méthode de variation de la constante

En notant y_0 une solution non nulle de (E_0), la méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution y de (E) sous la forme $y = \lambda y_0$ où λ est une nouvelle fonction inconnue (dérivable sur I) I→ $\boldsymbol{K}$

On a : $y' + ay = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 + \lambda y'_0 + a\lambda y_0 = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 = b$

On en déduit λ par primitivation…

Exemple :

Résoudre : $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$

L'EHA a pour solution : Ae^{-x} avec $A \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = A(x)e^{-x}$

On obtient $A'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}$

Soit A'(x) = $\frac{e^x}{1+e^x}$ et A(x) = ln(1+e^x)

D'où : y(x) = ln(1+e^x)e^{-x} + Ae^{-x} avec A∈ $\mathbb{R}$

III. Illustration en physiques.

1) Les équations rencontrées en Physique :

   a) Echange thermique : $\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$

      Résoudre cette équation…voir exercices

   b) Charge/décharge d'un condensateur à travers une résistance : U = $\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$

      Résoudre cette équation… voir exercices

   c) Chute libre d'un corps : m$\frac{dv}{dt} = -\alpha v - mg$

      Résoudre cette équation… voir exercices

   d) Réaction chimique : $\frac{dC}{dt} = -kC$

2) Etude d'une équation avec second membre de type sinusoïdal

   Résoudre : y' + $\frac{1}{\tau}$y = $\frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$

   Méthode : voir exercices

   Remarque : La solution particulière $\frac{A_0}{1+w^2\tau^2}(\cos(wt) + w\tau\sin(wt))$ sous la forme d'un cosinus « déphasé » : $\frac{A_0}{\sqrt{1+w^2\tau^2}}\cos(wt-\varphi)$ avec φ = Arctan($w\tau$)