Exercice 1 : Cinématique

1° Condition de roulement sans glissement.

Roulement sans glissement : le point de contact entre les 2 cylindres est immobile dans le référentiel du cylindre 1.

$\vec{v}(I) = \vec{0}$ où I est le point de contact

Formule de Varignon : $\vec{v}(I) = \vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}$

$$\vec{v}(G) = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(R_1 - R_2)\vec{e_r}\right] = (R_1 - R_2)\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\Omega} = \omega\,\vec{e_z} = \dot{\alpha}\,\vec{e_z} \\ \vec{GI} = R_2\,\vec{e_r} \end{array}\right\} \quad \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = R_2\,\dot{\alpha}\,\vec{e_\theta}$$

On en déduit $\vec{0} = (R_1 - R_2)\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + R_2\,\dot{\alpha}\,\vec{e_\theta}$

En projection : $(R_1 - R_2)\dot{\theta} + R_2\,\dot{\alpha} = 0$

$$\boxed{\dot{\alpha} = \omega = \frac{R_2 - R_1}{R_2}\,\dot{\theta}}$$

2. Mouvement d'une tige dans un cylindre

1) $\boxed{\rho = OG = \sqrt{R^2 - \ell^2}}$

2) $\boxed{\vec{OG} = \rho\,\vec{e_r} \qquad \vec{v} = \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \qquad \vec{a} = -\rho\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + \rho\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}}$

3) La barre reste toujours perpendiculaire à OG donc si OG tourne avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ alors la barre tourne avec la même vitesse angulaire. $\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e_z}}$

Autre méthode : $\vec{v}(G) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OG}$

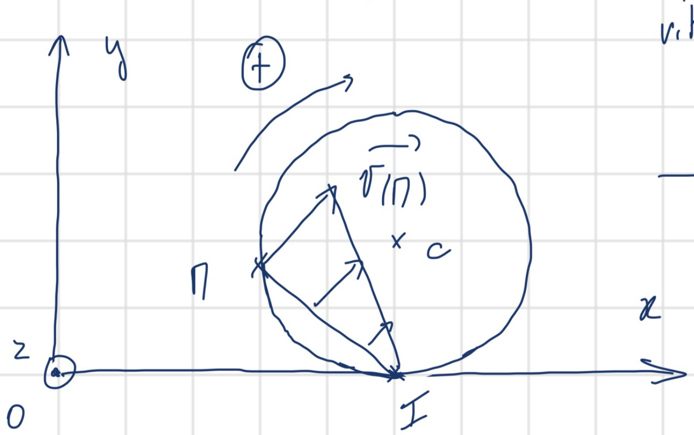
$$\rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = \vec{0} + \vec{\omega} \wedge \rho\,\vec{e_r}$$

$$\rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = \rho\,\omega\,\vec{e_z} \wedge \vec{e_r}$$

d'où $\omega = \dot{\theta}$ et $\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e_z}}$

3. Pièce roulant sur un plan

1) Roulement sans glissement : le point de contact avec le sol a une vitesse nulle $\vec{v}(I) = \vec{0}$



$\longrightarrow$ L'axe instantané de rotation passe par le point de contact avec la table. A l'instant t le solide est donc en rotation autour d'un axe passant par I

⚠ Le mouvement instantané d'une roue roulant sans glisser dans $\mathcal{R}$ ne doit pas être confondu avec son mouvement de rotation propre dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$

En utilisant la formule de Varignon : $\vec{v}(M) = \vec{v}(I) + \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$

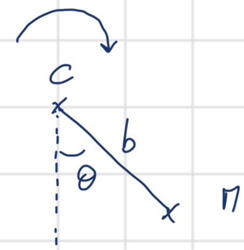
$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$$

$\longrightarrow$ On reconnaît là pour le point M une vitesse caractérisant un mouvement de rotation autour de l'axe I et porté par $\vec{e_z}$ avec le vecteur rotation $\vec{\omega}$

2) $\boxed{\vec{\omega} = -\omega\,\vec{e_z}}$

3) $\vec{v}(C) = \vec{v}(I) + \vec{\omega} \wedge \vec{IC} = \vec{0} - \omega\,\vec{e_z} \wedge b\,\vec{e_y}$

$\boxed{\vec{v}(C) = b\omega\,\vec{e_x} \quad \text{d'où} \quad v_C = b\omega}$



4) $\vec{v}(M) = \vec{v}(C) + \vec{\omega} \wedge \vec{CM}$

$= b\omega\,\vec{e_x} - \omega\,\vec{e_z} \wedge b\,\vec{e_r}$

$= b\omega\,\vec{e_x} - \omega\,\vec{e_z} \wedge b(\sin\theta\,\vec{e_x} - \cos\theta\,\vec{e_y})$

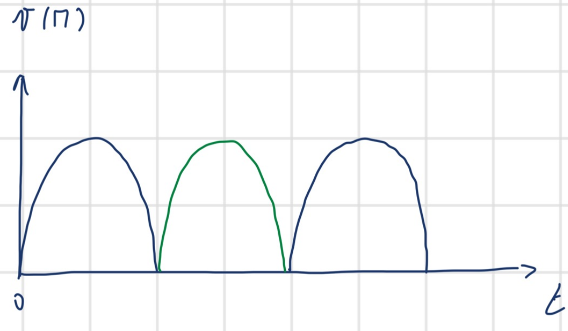
$= b\omega\,\vec{e_x} - b\omega(\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y})$

$= b\omega\left[(1-\cos\theta)\,\vec{e_x} - \sin\theta\,\vec{e_y}\right]$

$\|\vec{v}(M)\|^2 = b^2\omega^2\left[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right]$

$= b^2\omega^2(2 - 2\cos\theta)$

$= 4b^2\omega^2\sin^2\frac{\theta}{2}$



$\boxed{\|\vec{v}(M)\| = 2b\omega\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$

$\theta = 0 \qquad v(M) = 0 \qquad$ (point de contact)

$\theta = \pi \qquad v(M) = 2b\omega \qquad$ (sommet)

4° Mise en rotation d'un plateau

1) Condition de roulement sans glissement : $\vec{v}(I)_{disque} = \vec{v}(I)_{plateau}$

$\vec{v}(I)_{plateau} = \vec{v}(O) + \vec{\Omega_p} \wedge \vec{OI} = \vec{0} + \Omega_p \vec{e_z} \wedge R\vec{e_r} = R\Omega_p \vec{e_\theta}$

$\vec{v}(I)_{disque} = \vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \vec{v}(G) + \Omega(-\vec{e_r}) \wedge r(-\vec{e_z})$

$= \vec{v}(G) - r\Omega\vec{e_\theta}$

$\vec{v}(G) = \vec{v}(O_1) + \vec{\Omega_0} \wedge \vec{O_1G} = \vec{0} + \Omega_0 \vec{e_z} \wedge R\vec{e_r} = R\Omega_0 \vec{e_\theta}$

$\vec{v}(I)_{disque} = R\Omega_0 \vec{e_\theta} - r\Omega\vec{e_\theta} = (R\Omega_0 - r\Omega)\vec{e_\theta}$

La condition de roulement sans glissement conduit à :

$R\Omega_0 - r\Omega = R\Omega_p$

$$\boxed{r\Omega = R(\Omega_0 - \Omega_p)}$$

2° $\vec{v}(H) = \vec{v}(I)_{disque} + \vec{\Omega} \wedge \vec{IH}$

$= (R\Omega_0 - r\Omega)\vec{e_\theta} + \underbrace{\Omega(-\vec{e_r}) \wedge 2r\vec{e_z}}_{= 2r\Omega\vec{e_\theta}}$

$$\boxed{= (R\Omega_0 + r\Omega)\vec{e_\theta}}$$

Cas particulier : plateau bloqué $\Omega_p = 0$ d'où $r\Omega = R\Omega_0$

$\longrightarrow$ $\boxed{\vec{v}(H) = 2r\Omega\vec{e_\theta}}$

Autre méthode : Méthode de l'axe instantané de rotation

Principe : Pour un solide en mouvement plan, il existe un point I dont la vitesse est nulle, le solide est en rotation autour de ce point.

Dans un roulement sans glissement, ce point est le point de contact

$\overrightarrow{v}(I)$ disque $=$ $\overrightarrow{v}(I)$ plateau

Mais si on regarde le mouvement relatif du disque par rapport au plateau, le point I est immobile :

$\overrightarrow{v}(I)$ disque/plateau $= \vec{0}$

Mouvement relatif du disque par rapport au plateau :

La vitesse angulaire relative vaut $(\Omega_0 - \Omega_p)\vec{e_z}$

$$\overrightarrow{v}(G) = R\vec{e_r} \wedge (\Omega_0 - \Omega_p)\vec{e_z} = -R(\Omega_0 - \Omega_p)\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{v}(G) = \overrightarrow{v}(I) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IG}$$

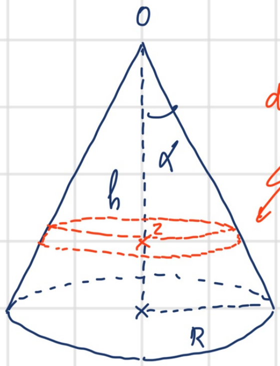
$$-R(\Omega_0 - \Omega_p)\overrightarrow{e_\theta} = \vec{0} + \Omega(-\vec{e_r}) \wedge r\vec{e_z}$$

$$= -r\Omega\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\longrightarrow \boxed{R(\Omega_0 - \Omega_p) = r\Omega}$$

Ex 2 Cinétique : application du cours

1° Centre de masse d'un cône



$$\vec{OG} = \frac{1}{M}\int_V \rho(A)\,\vec{OA}\,dV$$

$$r(z) = \frac{R}{h}z \quad \text{(triangles semblables)}$$

$$dV = \pi r^2 dz = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz$$

$$dm = \rho\, dV$$

$$M = \rho \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \frac{1}{3}\rho\pi R^2 h$$

$$z_G = \frac{1}{M}\int_0^h \rho\pi\frac{R^2}{h^2} z^3 dz = \frac{1}{M}\,\frac{\rho\pi R^2 h^2}{4} = \frac{3h}{4} \quad \text{(depuis le sommet)}$$

Rq Depuis la base $z_G = \frac{h}{4}$

2° /

3° 1) $J = 8{,}1 \cdot 10^{37}$ kg m²

$$L_\Delta = J\dot{\theta} = J\omega = J\frac{2\pi}{T} = 8{,}1\cdot 10^{37} \times \frac{2\pi}{86400} = 5{,}9 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2\text{.s}^{-1}$$

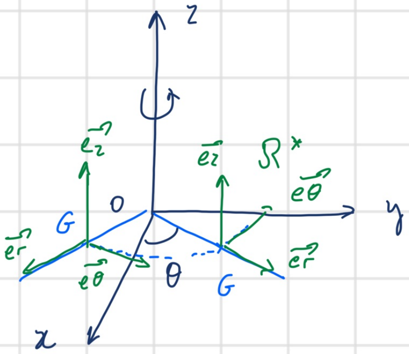
2) $J = 0{,}31$ kg.m²

$$\omega = 1000 \text{ tour.min}^{-1} = 1000 \times \frac{2\pi}{60} = 104{,}7 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$L_\Delta = J\omega = 33 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}$$

Ex 3 Mouvement de rotation d'une tige homogène

1°



$\vec{\omega} = \omega \vec{e_z} = \dot{\theta} \vec{e_z}$

G a un mouvement circulaire uniforme de rayon $l/2$.

$\vec{v_G} = \vec{v_O} + \vec{\omega} \wedge \vec{OG}$

Vitesse du centre de masse $\vec{v_G} = \dot{\theta} \vec{e_z} \wedge \frac{l}{2} \vec{e_r} = \frac{l}{2} \dot{\theta} \vec{e_\theta} = \frac{l}{2} \omega \vec{e_\theta}$

Quantité de mouvement $\vec{p} = M \frac{l}{2} \omega \vec{e_\theta}$

2° $J_{\Delta_0} = \int_\Sigma OA^2 \, dm = \lambda \int_0^l r^2 \, dr = \lambda \frac{l^3}{3} = \frac{M}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} Ml^2$

3° $\vec{L_O}(\Sigma) = J_{\Delta_0} \vec{\omega} = J_{\Delta_0} \omega \vec{e_z} = \frac{1}{3} Ml^2 \omega \vec{e_z}$

$L_{\Delta_0}(\Sigma) = \vec{L_O}(\Sigma) \cdot \vec{e_z} = \frac{1}{3} Ml^2 \omega$

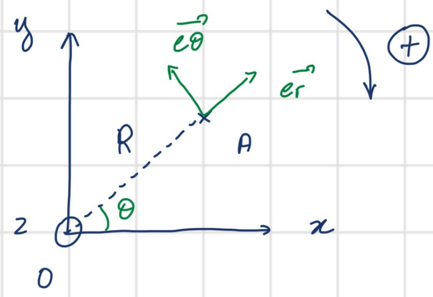
4° Théorème de Huygens : $J_{\Delta_0} = J_{\Delta_G} + Md^2$ (d : distance OG)

$\longrightarrow J_{\Delta_G} = \frac{1}{3} Ml^2 - M \frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} Ml^2$

$L^* = J_{\Delta_G} \omega = \frac{1}{12} Ml^2 \omega$

5° $J_{\Delta_G} = \int_\Sigma OA^2 \, dm = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} r^2 \, dr = \frac{M}{l} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} Ml^2$

Exercice 4 : Etude d'une poulie



1° $\vec{v_A} = \vec{v_O} + \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$

$= \omega(-\vec{e_z}) \wedge R\vec{e_r}$

$= -R\omega\,\vec{e\theta}$

La masse se déplace selon la verticale descendante $\boxed{\vec{v_m} = -R\omega\,\vec{e_y}}$

2° Au niveau de la masse suspendue :

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

$-mR\ddot{\theta}\,\vec{e_y} = -mg\,\vec{e_y} + T\,\vec{e_y}$ qui donne en projection sur O_y

$mR\ddot{\theta} = mg - T$

Au niveau de la poulie :

TMC : $\dfrac{d\vec{L_O}(A)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{T})$ (on écarte l'opérateur, il devra compenser ce moment)

$-J\ddot{\theta}\,\vec{e_z} = R\vec{e_x} \wedge T(-\vec{e_y})$

qui donne en projection sur O_z : $J\ddot{\theta} = RT$

$\ddot{\theta} = \dfrac{RT}{J}$

en injectant $\ddot{\theta}$ dans l'équation issue du PFD :

$\dfrac{mR^2T}{J} = mg - T$

$T = \dfrac{mg}{\dfrac{mR^2}{J} + 1} = \dfrac{mg}{\dfrac{2m}{m_p} + 1} = \dfrac{m_p\,mg}{2m + m_p} \approx 4{,}45\ N$

Condition pour que la poulie ne tourne pas :

L'opérateur exerce une force $\vec{F}$ sur la poulie !

$$\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f_i}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \vec{0}$$

$$R\,\vec{e_x} \wedge T(-\vec{e_y}) + R(-\vec{e_x}) \wedge F(-\vec{e_y}) = \vec{0}$$

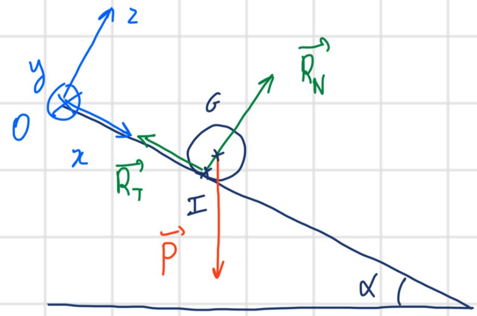
$$-RT\,\vec{e_z} + RF\,\vec{e_z} = \vec{0}$$

En projection selon $\vec{e_z}$: $F = T = 4,45\ N$

3° On repart du raisonnement précédent, sans F, donc avant l'équilibre

* accélération angulaire $\ddot{\theta} = \dfrac{RT}{J} = 89\ rad.s^{-2}$
* accélération linéaire $a = R\ddot{\theta} = 8,9\ m.s^{-2}$
* tension $T = 4,45\ N$

Exercice 5 : Roue sur un plan incliné



$\vec{P}\begin{cases} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{cases}$ $\vec{R_N}\begin{cases} 0 \\ R_N \end{cases}$ $\vec{R_T}\begin{cases} -R_T \\ 0 \end{cases}$

PFD $\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - R_T \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases}$

noté f

Glissement $\|\vec{R_T}\| = \mu_d \|\vec{R_N}\|$ / Non glissement $\|\vec{R_T}\| \leq \mu_s \|\vec{R_N}\|$

Varignon : $\vec{v}(I) = \vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}$

$$\vec{0} = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{\theta}\,\vec{e_y} \wedge R(-\vec{e_z})$$

$$\dot{x}\,\vec{e_x} = R\dot{\theta}\,\vec{e_x} \quad \text{d'où} \quad \dot{x} = R\dot{\theta}$$

On repart sur le PFD en injectant $\dot{x} = R\dot{\theta}$:

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = mg\sin\alpha - R_T \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases}$$

$\longleftarrow$ celle qui nous intéresse !

↳ Il faut exprimer R_T avec TMC

TMC : $$\frac{d\overrightarrow{L_G(\Sigma)}}{dt} = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_G(\vec{P})}}_{\vec{GG} \wedge \vec{P}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}_G(\vec{R_N})}}_{\vec{GG} \wedge \vec{R_N}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_G(\vec{R_T})}$$

$$J\ddot{\theta}\,\vec{e_y} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{GI} \wedge \vec{R_T} = R\,\vec{e_z} \wedge R_T\,\vec{e_x}$$

$$J\ddot{\theta}\,\vec{e_y} = R R_T\,\vec{e_y}$$

En projection sur Δ : $J_\Delta\ddot{\theta} = R R_T \longrightarrow R_T = \dfrac{J_\Delta\ddot{\theta}}{R}$

avec $J_\Delta = \dfrac{1}{2}mR^2$ on obtient $R_T = \dfrac{1}{2}mR\ddot{\theta}$

Par suite $mR\ddot{\theta} = mg\sin\alpha - \dfrac{1}{2}mR\ddot{\theta}$

donc $$\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R}t}$$

$$\boxed{v_G = R\dot{\theta} = \frac{2}{3}g\sin\alpha\, t}$$

2° $\|\overrightarrow{R_T}\| \leqslant f \|\overrightarrow{R_N}\|$

$$mg\sin\alpha - mR\ddot{\theta} \leqslant f\, mg\cos\alpha$$

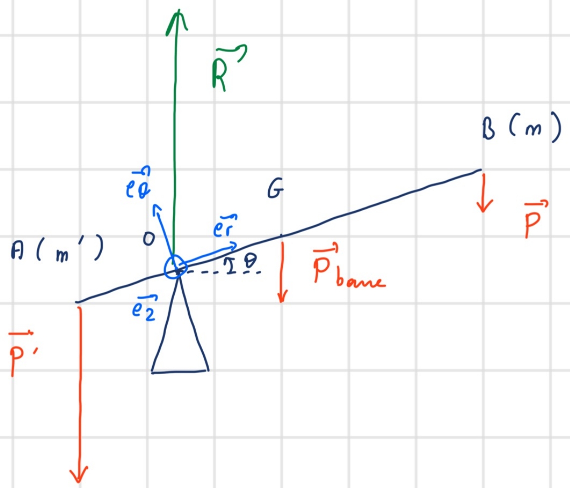
$$mg\sin\alpha - mR\frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R} \leqslant f\, mg\cos\alpha$$

$$\boxed{f \geqslant \frac{\tan\alpha}{3}}$$

3° $f = 0$ il n'y a plus de frottements !

$\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_G(\vec{f_i})} = \vec{0}$, il n'y a plus de moment qui s'applique à la roue donc plus de rotation. La roue glisse sans tourner.

Ex 6 : Balançoire asymétrique



1° $J_\Delta = \int_\Sigma OM^2\, dm = \int_{-a}^{3a} x^2 \lambda\, dx$

$$= \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{3a}$$

$$= \frac{M}{4a}\frac{28a^3}{3}$$

$$= \frac{7}{3}Ma^2$$

2° ⓐ Bilan des forces : réaction $\vec{R}$, $\vec{P}$, $\vec{P'}$, $\vec{P}_{banc}$

ⓑ $\sum_i \vec{f_i} = \vec{0}$ et $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{f_i})} = \vec{0}$

La banc est fixée donc pas de mouvement de translation, seule une rotation est possible

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{P})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{P'})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{P}_{barre})} = \vec{0}$$

On utilise la technique du bras de levier et on regarde si le moment a un effet positif ou négatif sur la rotation.

$$-mg(3a\cos\theta) + m'g(a\cos\theta) - Mg(a\cos\theta) = 0$$

$$\boxed{m' - 3m - M = 0}$$

c) Pas de condition sur l'angle, il garde sa valeur initiale.

3° a) $\vec{L_\Delta} = m\,\vec{OB} \wedge \vec{v_B} + m'\,\vec{OA} \wedge \vec{v_A} + J_\Delta \dot{\theta}\,\vec{u}$

$\vec{OA} = -a\,\vec{e_r}$ et $\vec{v_A} = -a\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\vec{OB} = 3a\,\vec{e_r}$ et $\vec{v_B} = 3a\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$$\vec{L_\Delta} = 9ma^2\dot{\theta}\,\vec{u} + m'a^2\dot{\theta}\,\vec{u} + J_\Delta\dot{\theta}\,\vec{u}$$

Avec $m = m'$ on obtient après projection $\boxed{L_\Delta = (J + 10ma^2)\dot{\theta}}$

b) TMC $\dfrac{d\vec{L_\Delta}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{P})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{P'})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{P}_{barre})}$

$$(J + 10ma^2)\ddot{\theta}\,\vec{u} = (-2mga\cos\theta - Mga\cos\theta)\,\vec{u}$$

$$\longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{(2m+M)ga}{J + 10ma^2}\cos\theta}$$

c) On multiplie les 2 membres par $\dot{\theta}$ et on intègre :

$$\int \ddot{\theta}\dot{\theta} = -\int \frac{(2m+M)ga}{J + 10ma^2}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{(2m+M)ga}{J+10ma^2}\sin\theta + cte$$

Conditions initiales $\theta_0 = 30°$ (d'où $\sin\theta_0 = 1/2$)

$\dot{\theta}_0 = 0$

$$0 = -\frac{(2m+M)ga}{J+10ma^2}\times\frac{1}{2} + cte \longrightarrow cte = \frac{1}{2}\frac{(2m+M)ga}{J+10ma^2}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega = \sqrt{\frac{(2m+M)ga}{J+10ma^2}(1-2\sin\theta)}}$$

d) $\theta = 0$ d'où $\vec{v_B} = 3a\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} = 3a\sqrt{\frac{(2m+M)ga}{J+10ma^2}}\,\vec{u_\theta}$

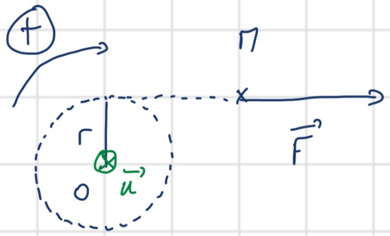
Ex 7 : Déroulement d'une bobine de fil

1° $J_\Delta = \int OM^2\,dm = \int r^2\,dm$

$$J_{\Delta\,cylindre} = \iiint r^2 \rho\, dr\, r d\theta\, dz$$

$$= \rho \times 2\pi \times h \times \frac{R^4}{4} \qquad \left(\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}MR^2$$



2° $J_{\Delta\,bobine} = MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$

3° $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \text{bras de levier} \times F$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_\Delta}(\vec{F}) = rF\vec{u}$

4° TMC $\frac{d\overrightarrow{L_{\Delta\,bobine}}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_\Delta}(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_\Delta}(\vec{R}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_\Delta}(\vec{F})$

En projection sur Δ : $J_\Delta \ddot{\theta} = rF$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{rF}{J_\Delta}}$$

Par intégration $\omega(t) = \frac{rF}{J_\Delta} t + \underbrace{cte}_{= 0 \text{ si } \omega(0) = 0}$

$$\boxed{\omega(t) = \frac{rF}{J_\Delta} t}$$

5° On veut dérouler une longueur L de fil en une durée τ.

Vitesse moyenne $v = \frac{L}{\tau}$

Vitesse angulaire $\omega = \frac{v}{r} = \frac{L}{r\tau}$ (1)

$\omega(\tau) = \frac{rF}{J_\Delta} \tau$ (2)

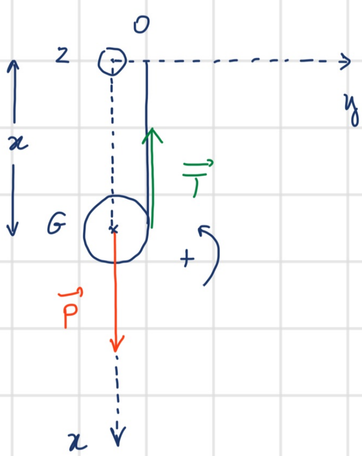
En combinant les 2 expressions $F = \frac{J_\Delta L}{r^2 \tau^2}$

$$= \left(MR^2 + \frac{1}{2} m r^2\right) \frac{L}{r^2 \tau^2}$$

$$= \left(\frac{MR^2}{r^2} + \frac{m}{2}\right) \frac{L}{\tau^2}$$

Si $M = m$ et $R = 2r$ alors $F = \frac{9mL}{2\tau^2} = \frac{9 \times 0{,}100 \times 10}{2 \times 5^2} = 0{,}18\,N$

Ex 8 Yoyo

1° 

$\vec{P} = 2Mg\,\vec{u_x}$

$\vec{T} = -T\,\vec{u_x}$

2° $J_\Delta = 2 J_{\Delta \text{ disque}} + J_{\Delta \text{ cylindre}} = \Pi R^2$

3° TMC $\dfrac{d\vec{L_G}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_G}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_G}(\vec{T})$

$$J_\Delta \ddot{\alpha}\, \vec{u_z} = \vec{0} + r\,\vec{u_y} \wedge T(-\vec{u_x})$$

$$J_\Delta \ddot{\alpha}\, \vec{u_z} = r T\, \vec{u_z}$$

en projection $J_\Delta \ddot{\alpha} = rT$ et donc $\boxed{T = \dfrac{J_\Delta \ddot{\alpha}}{r}}$

$$\boxed{\ddot{\alpha} = \dfrac{rT}{J_\Delta}}$$

4° Roulement sans glissement :

$$\vec{v_G} = \vec{v_I} + \vec{\Omega} \wedge \vec{IG}$$

$$\dot{x}\, \vec{u_x} = \vec{0} + \dot{\alpha}\, \vec{u_z} \wedge r(-\vec{u_y})$$

$\dot{x}\, \vec{u_x} = r\dot{\alpha}\, \vec{u_x}$ qui donne en projection $\dot{x} = r\dot{\alpha}$

En intégrant cette relation et en supposant $x = 0$ initialement :

$$\boxed{x = r\alpha}$$

5° PFD $2M\ddot{x}\, \vec{u_x} = 2Mg\, \vec{u_x} - T\, \vec{u_x}$

soit après projection $2M\ddot{x} = 2Mg - T$

$$2M\ddot{x} = 2Mg - \frac{J_\Delta \ddot{\alpha}}{r}$$

$$2M\ddot{x} = 2Mg - \frac{J_\Delta \ddot{x}}{r^2}$$

$$\ddot{x} = g - \frac{J_\Delta \ddot{x}}{2Mr^2}$$

$$\ddot{x}\left(1 + \frac{J_\Delta}{2Mr^2}\right) = g$$

$$\ddot{x}\left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right) = g$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2r^2 g}{2r^2 + R^2}}$$

6. Vitesse maximale quand $x = l$ à $t = \tau$

Par intégration $\quad \dot{x} = \frac{2r^2 g}{2r^2+R^2}\, t + \underbrace{cte}_{= 0}$ en supposant une vitesse initiale nulle

$$x = \frac{r^2 g}{2r^2+R^2}\, t^2 + \underbrace{cte}_{= 0}$$ yoyo initialement en O

On en déduit $\quad l = \frac{r^2 g}{2r^2+R^2}\, \tau^2 \quad$ soit $\quad \tau = \sqrt{\frac{2r^2+R^2}{r^2 g}\, l}$

puis $\quad \boxed{v_{max} = \dot{x}(\tau) = \sqrt{\frac{4r^2 g}{2r^2+R^2}\, l}}$

7. $\boxed{T = \frac{J_\Delta \ddot{x}}{r^2} = \frac{MR^2}{\cancel{r^2}} \cdot \frac{2\cancel{r^2} g}{2r^2+R^2} = \frac{2MR^2 g}{2r^2+R^2}}$

Ex 9 : Chute d'une barre sur une patinoire

1. PFD $\quad m\vec{a}_M = \vec{P} + \vec{R_N}$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_M = 0 & (1) \\ m\ddot{y}_M = -mg + R_N & (2) \end{cases}$$

$\ddot{x}_M = 0$ qui donne par intégration $\dot{x}_M(t) = cte$

or la barre est lâchée sans vitesse initiale $\dot{x}(0) = 0 = cte$

donc $\dot{x}_M(t) = 0$.

Une deuxième intégration conduit à $x_M(t) = \underline{cte}$

$\longrightarrow$ La barre ne bouge pas horizontalement

L'absence de force horizontale impose un mouvement verticale

2. TMC $\dfrac{d\vec{L_A}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{R_N})}_{= \vec{0}}$

$$\frac{d}{dt}(J_A \dot{\theta}\, \vec{u_z}) = \vec{AM} \wedge \vec{P}$$

$$J_A \ddot{\theta}\, \vec{u_z} = (-l \sin\theta\, \vec{u_x} + l \cos\theta\, \vec{u_y}) \wedge (-mg\, \vec{u_y})$$

$$J_A \ddot{\theta}\, \vec{u_z} = mgl \sin\theta\, \vec{u_z}$$

En projection $J_A \ddot{\theta} = mgl \sin\theta$

Théorème de Huygens $J_A = J_M + ml^2$

$$J_A = \frac{1}{12} m (2l)^2 + ml^2 = \frac{4}{3} ml^2$$

On obtient $\dfrac{4}{3} ml^2 \ddot{\theta} = mgl \sin\theta$

qui donne $\boxed{\ddot{\theta} - \dfrac{3}{4}\dfrac{g}{l} \sin\theta = 0}$

Ex 10 : Effet rétro d'une boule de billard

1° $\vec{v_I} = \vec{v_C} + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI}$

$= v_0 \vec{u_x} - \omega_0 \vec{u_y} \wedge R(-\vec{u_z})$

$= (v_0 + R\omega_0)\vec{u_x}$

2° PFD

$$M\ddot{x} = -R_T \quad (1)$$
$$M\ddot{y} = 0 \quad (2)$$
$$M\ddot{z} = -Mg + R_N = 0 \quad (3)$$

La boule reste en contact, pas de mouvement selon Oz

$\dot{y}(t) = cte = 0$ (d'après l'énoncé v initiale selon $\vec{u_x}$)

$y(t) = cte \longrightarrow$ Mouvement rectiligne selon Ox

3° 1ère phase du mouvement : Glissement $R_T = f R_N$

Avec (3) on obtient $R_N = mg$ puis $R_T = fMg$

que l'on injecte dans (1) :

$M\ddot{x} = -fMg$ qui s'écrit aussi : $\dfrac{dv_C}{dt} = -fg$

on en déduit le mouvement de translation par intégration :

$v_C(t) = -fgt + cte$, à $t = 0$ $v_C(0) = v_0$

$$v_C(t) = -fgt + v_0$$

La seule force qui impose un mouvement de rotation c'est $\vec{R_T}$

$$\vec{\mathcal{M}_C}(\vec{R_T}) = \vec{CI} \wedge \vec{R_T} = R(-\vec{u_y}) \wedge R_T(-\vec{u_x}) = -RR_T\,\vec{u_z}$$

Après projection $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R_T}) = -RR_T = -Rf\,Mg$

TMC : $J_\Delta \dot{\omega} = -Rf\,Mg$

$$\frac{2}{5}MR^2\dot{\omega} = -Rf\,Mg$$

$$\dot{\omega} = -\frac{5}{2}\frac{fg}{R}$$

et $\boxed{\omega(t) = -\frac{5}{2}\frac{fg}{R}t + \omega_0}$ $(\vec{\Omega} = -\omega\,\vec{u_y})$

La 1ère phase s'achève lorsque la vitesse de glissement s'annule :

$\vec{v_I} = \vec{v_C} + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI} = \vec{0}$ (à t quelconque)

$\longrightarrow$ $v_C + R\omega = 0$ d'où $\underline{v_C = -R\omega}$

En reprenant les expressions de v_C et ω on peut écrire :

$$-fgt_f + v_0 = +\frac{5}{2}fgt_f - R\omega_0$$

$\longrightarrow$ $\boxed{t_f = \frac{2(v_0 + R\omega_0)}{7fg}}$

Distance parcourue : $v_C = v_0 - fgt$

$$x_C = v_0 t - \frac{1}{2}fgt^2$$

$$\boxed{x_C(t_f) = v_0 t_f - \frac{1}{2}fgt_f^2}$$

4° 2ème phase : roulement sans glissement

$v_I = 0$ d'où $v_C = -R\omega =$ constante

$$v_C = -R\left(-\frac{5fg}{2R}t_f + \omega_0\right)$$

avec $t_f = \dfrac{2(v_0 + R\omega_0)}{7fg}$ il vient :

$$v_C = \frac{5}{7}(R\omega_0 + v_0) - R\omega_0$$

$$v_C = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}R\omega_0$$

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{5}{7}\frac{v_0}{R} - \frac{2}{7}\omega_0$$

Condition pour avoir un effet rétro $v_C < 0$

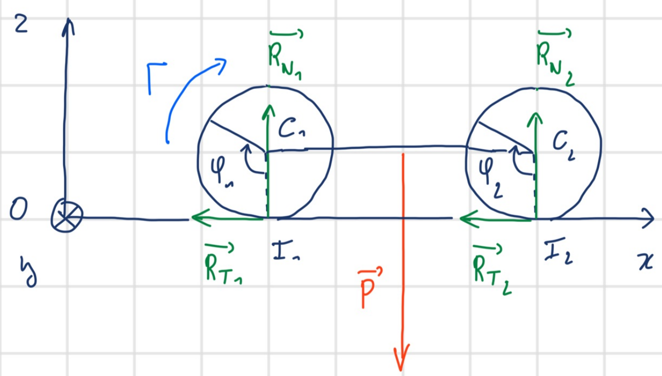
$\dfrac{5}{7}v_0 - \dfrac{2}{7}R\omega_0 < 0$ il faut $\boxed{\omega_0 > \dfrac{5v_0}{2R}}$

5° $f = 0$ d'où $R_T = 0$ aucune variation de vitesse
aucune variation de rotation

$v_C = v_0$ et $\omega = \omega_0$

Ex 11 Le vélo

1.



Roulement sans glissement :

$$\vec{v}_{C_1} = \vec{v}_{I_1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{I_1C_1}$$

$$\vec{v}_{C_1} = R\omega\,\vec{u}_x \qquad (\omega = \dot{\varphi})$$

$$\longrightarrow \quad v_{C_1} = v_{C_2} = v_G = \dot{x} = R\omega$$

2° Le cycliste exerce un couple Γ sur la roue arrière.

Il faut également tenir compte des frottements $\overrightarrow{R_{T_1}}$ qui agissent sur la roue

3° PFD $(M+2m)\ddot{x} = -R_{T_1} - R_{T_2}$ (en projection sur Ox)

TMC $J\dot{\omega} = RR_{T_1} + \Gamma \longrightarrow R_{T_1} = \dfrac{J\dot{\omega} - \Gamma}{R}$

$J\dot{\omega} = RR_{T_2} \longrightarrow R_{T_2} = \dfrac{J\dot{\omega}}{R}$

$$(M+2m)\ddot{x} = -\frac{J\dot{\omega}-\Gamma}{R} - \frac{J\dot{\omega}}{R} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} = R\omega \\ \ddot{x} = R\dot{\omega} \end{pmatrix}$$

$$(M+2m)\ddot{x} = -\frac{2J\ddot{x}}{R^2} + \frac{\Gamma}{R}$$

$$\ddot{x}\left(M+2m+\frac{2J}{R^2}\right) = \frac{\Gamma}{R} \qquad \left(J = \frac{1}{2}mR^2\right)$$

$$\ddot{x}(M+3m) = \frac{\Gamma}{R}$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{\Gamma}{(M+3m)R}}$$

4° Condition pour un roulement sans glissement $\|\overrightarrow{R_T}\| \leqslant f\,\|\overrightarrow{R_N}\|$

PFD $0 = -(M+2m)g + R_{N_1} + R_{N_2}$ (en projection sur Oz)

$$R_N = \frac{(M+2m)g}{2} \qquad (R_{N_1} = R_{N_2} = R_N)$$

On suppose que la roue avant ne glisse pas

Roue 1 : $\dfrac{J\dot{\omega} - \Gamma}{R} \leqslant \dfrac{(M+2m)fg}{2}$

$$\frac{1}{2} m \ddot{x} - \frac{\Gamma}{R} \leqslant \frac{(M+2m)fg}{2}$$

$$\frac{m\Gamma}{2(M+3m)} - \frac{\Gamma}{R} \leqslant \frac{(M+2m)fg}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{m}{2(M+3m)} - \frac{1}{R}\right) \leqslant \frac{(M+2m)fg}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \Gamma \leqslant \frac{(M+2m)fg}{\left(\frac{m}{M+3m} - \frac{2}{R}\right)} \qquad (\text{Roue } 1)$$

Roue 2 :

$$\frac{J\dot{\omega}}{R} \leqslant \frac{(M+2m)fg}{2}$$

$$\frac{m\Gamma}{2(M+3m)} \leqslant \frac{(M+2m)fg}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Gamma \leqslant \frac{(M+2m)fg}{\frac{m}{M+3m}}} \qquad (\text{Roue } 2)$$

Si la condition sur la roue 2 est remplie alors elle l'est aussi pour la roue 1

Ex 12 : Oscillations d'un 1/2 cylindre

1° $J_{O'z_1} = \iiint O'M^2 \, dm = \iiint \rho r^2 \, dr . r d\theta . dz$

$$= \rho \int_0^R r^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^h dz$$

$$= \frac{m}{\frac{\pi R^2 h}{2}} \times \frac{R^4}{4} \times \pi \times h$$

$$\boxed{J_{O'z_1} = \frac{1}{2} m R^2}$$

2° Il y a non glissement entre le cylindre et le support (lié à $\mathcal{R}$)
En supposant que le point A est un point du 1/2 cylindre (point coïncident), on en déduit : $\vec{v_A}' = \vec{0}$

A un instant t donné, il y a rotation autour du point A considéré comme fixe.

Il faut appliquer 2 fois le théorème de Huygens :

$*$ $J_{O'_{z_1}} = J_G + m\, O'G^2 \qquad \left(O'G = \dfrac{4R}{3\pi} \right)$

$*$ $J_A = J_G + m\, AG^2 \qquad \left(\vec{AG} = \vec{AO'} + \vec{O'G} \right)$

avec $\vec{AG} = \vec{AO'} + \vec{O'G}$

d'où $AG^2 = AO'^2 + O'G^2 - 2\,\|\vec{O'A}\| \times \|\vec{O'G}\| \cos\theta$

$$AG^2 = R^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 - 2R\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\cos\theta$$

$$J_A = J_{O'_{z_1}} + m\,(AG^2 - O'G^2)$$

$$J_A = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 \left(1 - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{J_A = m R^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)}$$

3° TMC $\quad \dfrac{d}{dt}(\vec{L_A}) = \vec{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}_A}(\vec{R})}_{=\vec{0}}$

$$\frac{d}{dt}\left(J_A \dot{\theta}\,(-\vec{u_z})\right) = \vec{AG} \wedge \vec{P}$$

$$-J_A \ddot{\theta}\, \vec{u_z} = -mg\, \overbrace{O'G \sin\theta}^{\text{bras de levier}}$$

$$mR^2\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)\ddot{\theta}+\frac{4Rmg}{3\pi}\sin\theta=0$$

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{4g}{R\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)}\sin\theta=0}$$

4. Approximation des petits angles $\quad \ddot{\theta}+\omega_0^2\,\theta=0$

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{4g}{R\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\right)}}}$$

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}}$$