TD 9 : Théorème du moment cinétique

Ex 1 : Applications

1° QCM 1) V 2) F 3) V en N.m comme le joule
4) F 5) x x ✓ 6) x x x ✓

2° $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

$\|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})\| = F \times d$

Cas 1) $F = 36/0,3 = 120\ N$

Cas 2) $\|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})\| = 0,3 \times 120 \times \sin 65° = 33\ N.m$

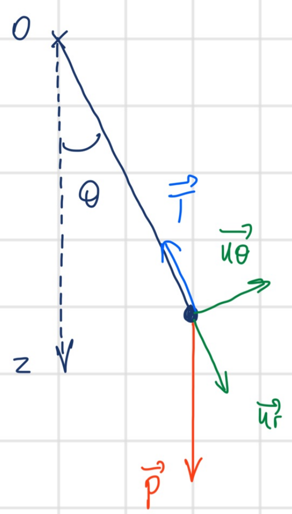
avec le bras de levier : $d = 0,3 \sin 65°$

$\|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})\| = F \times d = 120 \times 0,3 \sin 65° = 33\ N.m$

3° Equilibre si la somme des moments est nulle.

$$\left.\begin{aligned} \|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P_A})\| &= m_A g d_A \\ \|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P_B})\| &= m_B g d_B \\ \|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P_C})\| &= m_C g d_C \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} m_A g d_A + m_B g d_B &= m_C g d_C \\ d_C &= \frac{m_A d_A + m_B d_B}{m_C} \end{aligned}$$

Ex 2 : Pendule simple



Ref terrestre supposé galiléen

Système : bille de masse m

Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{T}$

Méthode 1 : TMC

$\vec{OM} = l\,\vec{u_r}$ $\quad\quad \vec{v} = l\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$\vec{L_o}(M) = m\,\vec{OM} \wedge \vec{v} = ml^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$

$\vec{M_o}(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = l\,\vec{u_r} \wedge (mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta})$

$= -mgl\sin\theta\,\vec{u_\Delta}$ $\quad\quad (\vec{u_\Delta} = \vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta})$

$\vec{M_o}(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = l\,\vec{u_r} \wedge (-T\,\vec{u_r}) = \vec{0}$

TMC : $\dfrac{d\vec{L_o}(M)}{dt} = \vec{M_o}(\vec{P}) + \vec{M_o}(\vec{T})$

$ml^2\ddot{\theta}\,\vec{u_\Delta} = -mgl\sin\theta\,\vec{u_\Delta} + 0\,\vec{u_\Delta}$

en projection sur Δ : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\theta = 0}$

Méthode 2 : PFD

$\vec{OM} = l\,\vec{u_r}$ $\quad \vec{v} = l\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ $\quad \vec{a} = -l\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + l\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

PFD en projection
$$-ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \quad (1)$$
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad (2)$$

(2) conduit à $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$

Méthode 3 : Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T})$$

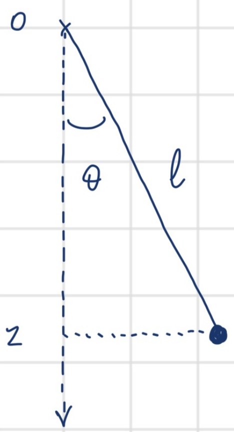
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right) = (mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta})\,l\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + (-T\,\vec{u_r})\,l\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

après simplification : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$

Méthode 4 : Conservation de l'énergie mécanique

$Em = Ec + Ep$ avec $Ec = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$



et $Ep = mgz = mgl\cos\theta$

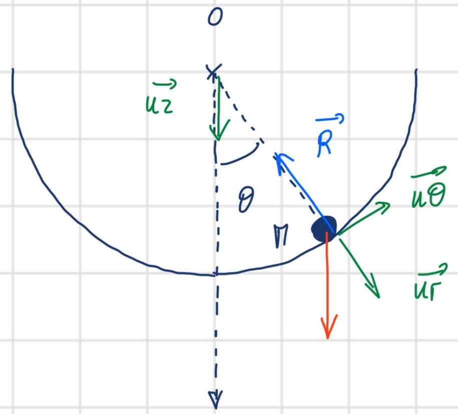
$$\frac{dEm}{dt} = 0$$

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

Ex 3 : Oscillation d'une bille dans une cuvette

1° Référentiel terrestre supposé galiléen



Système : bille de masse m

Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$

2° $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u_r}$ $\quad \vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$$\boxed{\overrightarrow{L_o}(M) = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = mR^2\dot{\theta}\,\vec{u_\Delta}}$$

3° $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = R\vec{u_r} \wedge (mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta})$

$= -mgR\sin\theta\,\vec{u_\Delta}$

$\mathcal{M}_o(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = R\vec{u_r} \wedge (-T\vec{u_r}) = \vec{0}$

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{T})$$

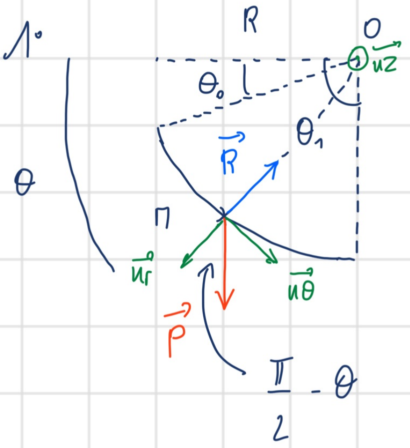
$mR^2\ddot{\theta}\,\vec{u_\Delta} = -mgR\sin\theta\,\vec{u_\Delta}$

Projection sur Δ + $\sin\theta \approx \theta$: $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$

4° $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ donc $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$

Ex 4 : Toboggan

1°



$\theta_0 = 15°$

$\theta_1 = 90°$

$\vec{P} \begin{cases} mg\cos(\pi/2 - \theta) = mg\sin\theta \\ mg\sin(\pi/2 - \theta) = mg\cos\theta \end{cases}$

$\vec{R} \begin{cases} -R \\ 0 \end{cases}$

$$\vec{L_0} = m\,\vec{OM} \wedge \vec{v} = mR\,\vec{u_r} \wedge R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} = mR^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

$$\vec{\mathcal{M}_0}(\vec{P}) = mgR\cos\theta\,\vec{u_z} \qquad \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{R}) = \vec{0}$$

TMC $\quad \dfrac{d\vec{L_0}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{R})$

en projection sur Oz : $mR^2\ddot{\theta} = mgR\cos\theta$ et $\boxed{\ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\cos\theta}$

2° $\quad \ddot{\theta}\dot{\theta} = \dfrac{g}{R}\cos\theta\,\dot{\theta}$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = \dfrac{g}{R}\dfrac{d}{dt}(\sin\theta)$ qui donne par intégration :

$\dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \dfrac{g}{R}\sin\theta + C$

à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ et $v(0) = 0$ (donc $\dot{\theta}(0) = 0$)

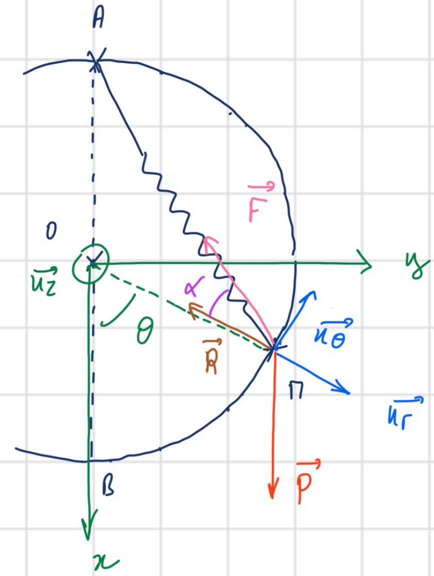
$C = -\dfrac{g}{R}\sin\theta_0$ on a donc $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{2g}{R}(\sin\theta - \sin\theta_0)}$

$$\boxed{v = R\dot{\theta} = \sqrt{2gR(\sin\theta - \sin\theta_0)}}$$

3° $\quad v_{max} = 6{,}0\ m.s^{-1}$

Ex 5 Rappel élastique le long d'un cercle

1° Référentiel terrestre supposé galiléen



Système : masselotte

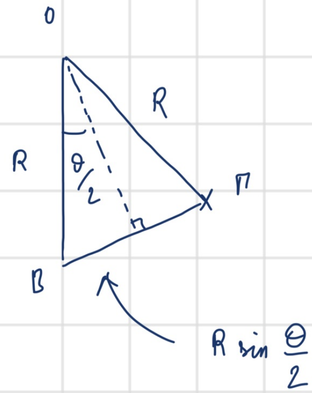
Bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$

$\vec{P}\begin{cases} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{cases}$ $\qquad$ $\vec{R}\begin{cases} -R \\ 0 \end{cases}$

Force de rappel : $\vec{F} = -k\,(AM - l_0)\,\vec{u_{ext}}$

ABM : triangle rectangle $\qquad AB = 2R$

$BM = 2R\sin\dfrac{\theta}{2}$



$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2}$

$AM = \sqrt{4R^2 - 4R^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

$AM = 2R\cos\dfrac{\theta}{2}$

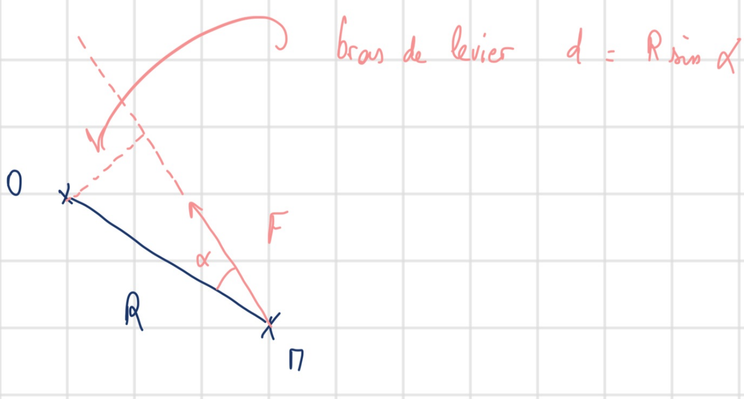
$\vec{F} = -k\left(2R\cos\dfrac{\theta}{2} - l_0\right)\vec{u_{ext}}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{P} = R\,\vec{u_r}\wedge mg\,(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_y})$

$= -mgR\sin\theta\,\vec{u_z}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{R}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{R} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$



$\widehat{OAM} = \widehat{OMA} = \alpha$

$\pi = 2\alpha + (\pi - \theta)$ et $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$

$d = R \sin\dfrac{\theta}{2}$

$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = R\vec{u_r} \wedge \left(-F\cos\dfrac{\theta}{2}\vec{u_r} + F\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{u_\theta}\right)$

$= RF\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{u_z}$

$= R\,k\left(2R\cos\dfrac{\theta}{2} - l_0\right)\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{u_z}$

TMC : $\dfrac{d\vec{L_o}}{dt} = \mathcal{M}_o(\vec{P}) + \mathcal{M}_o(\vec{R}) + \mathcal{M}_o(\vec{F})$

$mR^2\ddot{\theta}\vec{u_z} = -mgR\sin\theta\,\vec{u_z} + \vec{0} + Rk\left(2R\cos\dfrac{\theta}{2} - l_0\right)\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{u_z}$

en projection sur l'axe Oz :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\sin\theta - \dfrac{k}{mR}\left(2R\cos\dfrac{\theta}{2} - l_0\right)\sin\dfrac{\theta}{2} = 0}$$

Rq : si $k = 0$ on retrouve un oscillateur harmonique

2° Le mouvement dépend uniquement de la coordonnée θ. L'équilibre est donc vérifié lorsque :

$$\dfrac{d(E_{pp} + E_{p\,él})}{d\theta} = 0$$

$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

$\delta W(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\vec{dl} = (mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta})\cdot R\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

$$\delta W(\vec{P}) = -dE_{pp} = -mgR\sin\theta\, d\theta \quad \text{donc} \quad \frac{dE_{pp}}{d\theta} = mgR\sin\theta$$

De même on a $\vec{F} = -F\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u_r} + F\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u_\theta}$

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{dP} = \left(-F\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u_r} + F\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u_\theta}\right)\cdot R\,d\theta\,\vec{u_\theta}$$

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_{pél} = FR\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \quad \text{donc} \quad \frac{dE_{pél}}{d\theta} = -FR\sin\frac{\theta}{2}$$

avec $F = k\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)$

$$\frac{d(E_{pp}+E_{pél})}{d\theta} = mg\cancel{R}\sin\theta - k\cancel{R}\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$mg\sin\theta - kR\sin\theta + kl_0\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$(mg - kR)\sin\theta + kl_0\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$2(mg - kR)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + kl_0\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\boxed{\left[2(mg - kR)\cos\frac{\theta}{2} + kl_0\right]\sin\frac{\theta}{2} = 0}$$

$\sin\frac{\theta_e}{2} = 0$ soit $\theta_e = 0$

$2(mg - kR)\cos\frac{\theta_e}{2} + kl_0 = 0$ soit $\theta_e = 2\cos^{-1}\left(\frac{kl_0}{2(kR - mg)}\right)$

Condition d'existence : $\left|\cos\frac{\theta_e}{2}\right| \leq 1$ donc $kR > mg$

et $kl_0 \leq 2(kR - mg)$

3. $\left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_e} = 0$ $\quad\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_e} > 0$ équilibre stable (minimum)

$\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_e} < 0$ équilibre instable (maximum)

On dérive une 2ème fois :

* Terme gravitationnel : $\frac{dE_{pp}}{d\theta} = mgR \sin\theta$

$$\frac{d^2 E_{pp}}{d\theta^2} = mgR\cos\theta$$

* Terme élastique : $\frac{dE_{pél}}{d\theta} = -kR\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\sin\frac{\theta}{2}$

$$\frac{d^2 E_{pél}}{d\theta^2} = kR^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{kR}{2}\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\boxed{\frac{d^2(E_{pp}+E_{pél})}{d\theta^2} = mgR\cos\theta + kR^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{kR}{2}\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta}{2}}$$

* Stabilité en $\theta_e \neq 0$

Condition d'équilibre : $2(mg - kR)\cos\frac{\theta_e}{2} + kl_0 = 0$

$$2mg\cos\frac{\theta_e}{2} = k\left(2R\cos\frac{\theta_e}{2} - l_0\right)$$

On remplace dans la dérivée seconde / $\cos\theta_e = 2\cos^2\frac{\theta_e}{2} - 1$

$$mgR\left(2\cos^2\frac{\theta_e}{2} - 1\right) + kR^2\sin^2\frac{\theta_e}{2} - mgR\cos^2\frac{\theta_e}{2}$$

$$- mgR\sin^2\frac{\theta_e}{2} + kR^2\sin^2\frac{\theta_e}{2}$$

Le signe dépend de $kR - mg$, or l'existence des équilibres non nuls impose justement $kR > mg$ $\longrightarrow$ stable.

* $\theta_e = 0$ $\quad \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgR - \frac{kR}{2}(2R - l_0)$

> 0 stable / < 0 instable / transition $2mg = k(2R - l_0)$

Ex 6 : Balance de Coulomb

Dans cet exercice on ne travaille pas avec des forces mais directement avec des couples

TMC $\frac{d\vec{L_z}}{dt} = \sum \vec{\Gamma}$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe :

$\vec{L_z} = J\dot{\theta}\,\vec{u_z}$ avec J moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe vertical passant par son centre.

On a donc $J\ddot{\theta}\,\vec{u_z} = -C\theta\,\vec{u_z}$ qu'on projette sur Oz :

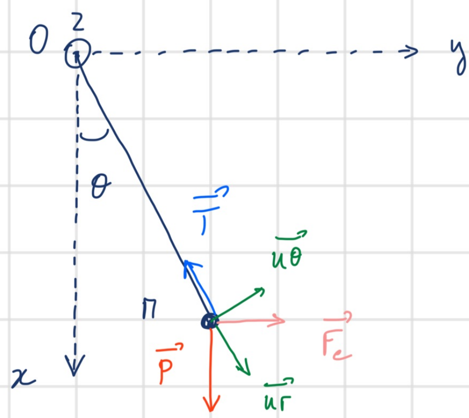
$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$$ ⟶ oscillateur harmonique

2° $$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$$ avec $J = \frac{mL^2}{12}$

Ex 7 : Pendule électrostatique

1° Ref terrestre supposé galiléen

Syst étudié : boule



Bilan des forces :

$\vec{P}\begin{cases} mg\cos\theta\ \vec{u_r} \\ -mg\sin\theta\ \vec{u_\theta}\end{cases}$ $\vec{T}\begin{cases} -T \\ 0\end{cases}$ $\vec{F_e}\begin{cases} QE\sin\theta \\ QE\cos\theta\end{cases}$

$\vec{OM} = R\,\vec{u_r}$ et $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

Equilibre : $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F_i}) = \vec{0}$

En projection sur Oz : $-mgR\sin\theta_e + 0 + RQE\cos\theta_e = 0$

d'où $\tan\theta_e = \dfrac{QE}{mg}$

$\theta_e \simeq 5,9 \cdot 10^{-7}$ rad

TMC + Projection sur Oz :

$$mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta + RQE\cos\theta$$

$\theta = \theta_e + \varepsilon$ et $\cos(\theta_e + \varepsilon) = \cos\theta_e - \varepsilon\sin\theta_e$

$\sin(\theta_e + \varepsilon) = \sin\theta_e + \varepsilon\cos\theta_e$

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = \cancel{-mgR\sin\theta_e} - mgR\varepsilon\cos\theta_e + \cancel{RQE\cos\theta_e} - RQE\varepsilon\sin\theta_e$$

on obtient $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0$

avec $\omega_0^2 = \dfrac{1}{mR}(mg\cos\theta_e + QE\sin\theta_e)$

Approximation des petits angles :

$\tan\theta_e \approx \theta_e = \dfrac{QE}{mg}$

$\omega_0^2 = \dfrac{g}{R} + \dfrac{Q^2E^2}{m^2 g}$ négligeable $\approx \dfrac{g}{R}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} \approx 0,63$ s