

Interférences par division du front d'onde

Nous avons montré dans le cours précédent que deux ondes ne pouvaient être cohérentes que si elles étaient issues de la même source primaire mais avaient suivi deux chemins différents pour atteindre le point d'observation, ce qui nécessite d'utiliser un interféromètre.

Dans un interféromètre à division du front d'onde, une source émet les mêmes trains d'onde dans plusieurs directions, dont une partie au moins est déviée par un miroir ou grâce au phénomène de diffraction, ce qui permet de les superposer.

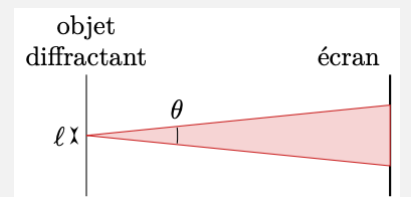
1. Rappels sur la diffraction

On appelle diffraction l'étalement d'une onde dans l'espace dû à son passage au travers ou autour d'un obstacle.

Toutes les figures de diffraction présentent une tâche centrale brillante entourée d'autres motifs. L'allure précise est caractéristique de l'objet diffractant : à partir de la figure de diffraction, il est possible de retrouver la forme et les dimensions de l'objet diffractant. C'est d'ailleurs par diffraction de rayons X que l'on détermine la structure microscopique des solides cristallins, de l'ADN, des protéines, des virus...

La figure de diffraction à grande distance possède les mêmes symétries et invariances que l'objet diffractant.

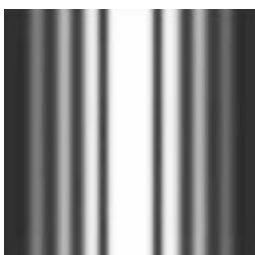
Plus l'objet diffractant est étroit, plus la figure de diffraction est large : la figure de diffraction par un objet de taille caractéristique $\ell < \lambda$ a une largeur angulaire $\theta \sim \lambda/\ell$.



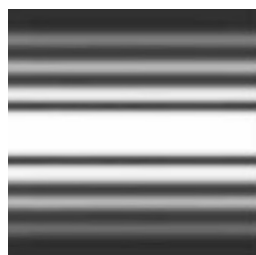
Remarque : Ne pas croire que la diffraction nécessite $\ell < \lambda$! Par exemple, les ondes lumineuses sont diffractées par des objets de taille de l'ordre du mm, soit $\ell \approx 2000\lambda$. Le résultat ci-dessus n'est d'ailleurs qu'un développement limité au premier ordre, valable pour $\lambda \ll \ell$.

Application : À la recherche de l'objet diffractant

Identifier l'objet diffractant ayant produit les figures ci-dessous :



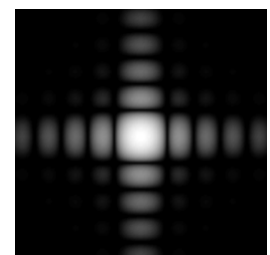
Fente verticale



Fente horizontale



Disque



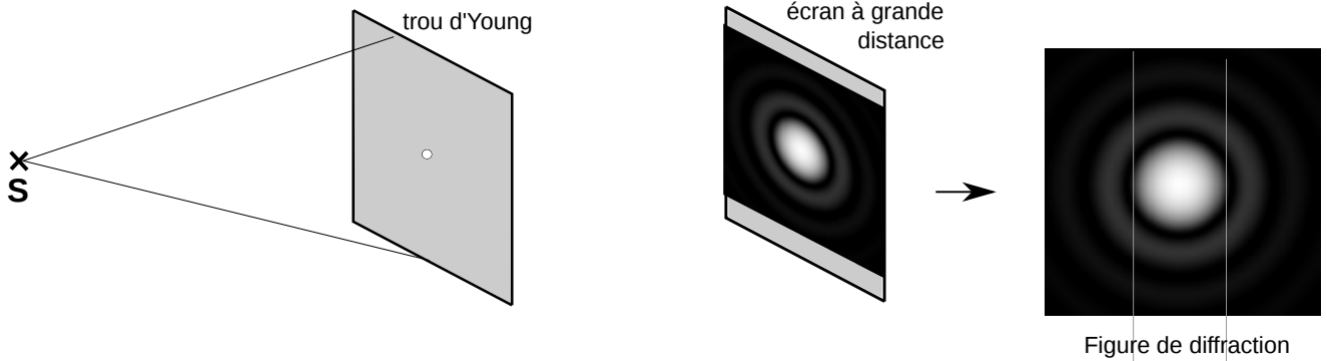
Carré

2. Trous d'Young

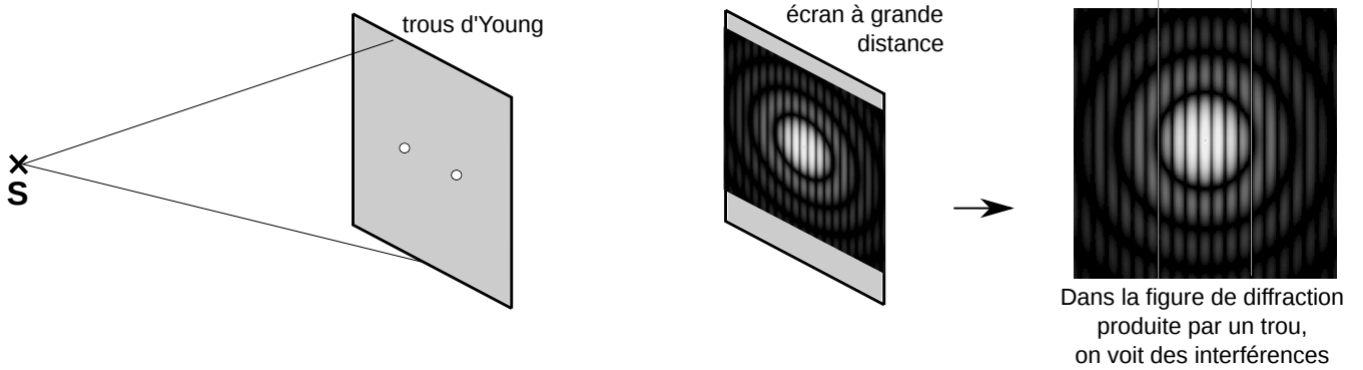
2.1. Dispositif et modélisation

Le dispositif des trous d'Young est constitué d'un écran opaque percé de deux trous circulaires.

UN trou : diffraction

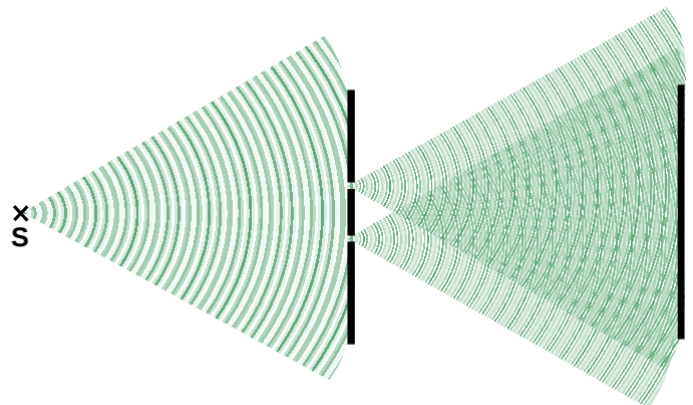


DEUX trous : diffraction + interférences



On appelle **champ d'interférences** la zone de l'espace dans laquelle les deux ondes se superposent.

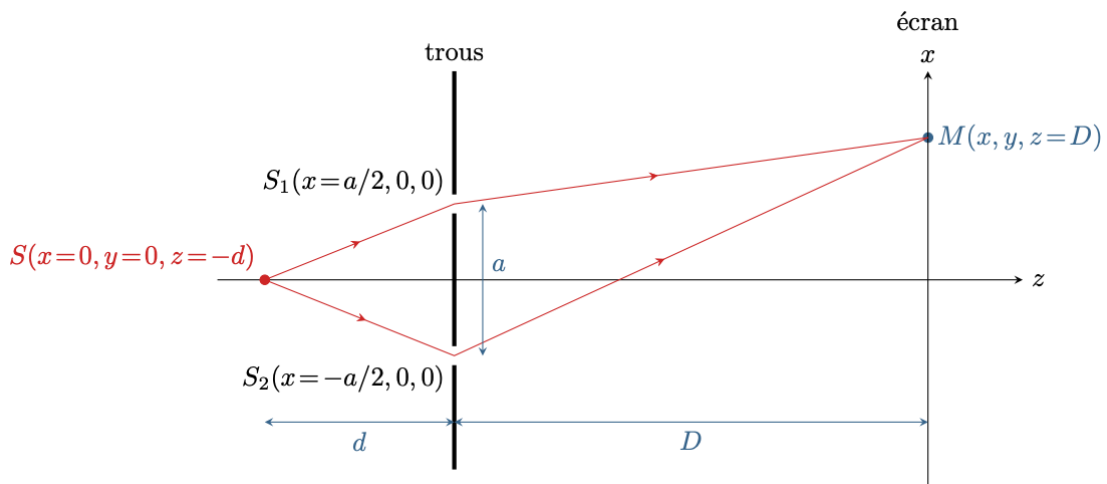
Pour les trous d'Young, les interférences sont observables en tout point du champ d'interférences



2.2. Différence de marche à grande distance

Hypothèses et notations

- Les trous d'Young sont éclairés par une source ponctuelle S supposée monochromatique, et les deux **sources secondaires** S_1 et S_2 sont également ponctuelles et monochromatiques.
- Les sources secondaires sont situées dans le plan $y = 0$, mais le point M a une ordonnée y a priori non nulle : le schéma de la figure ci-dessous donne donc une vue « écrasée » de la situation.
- Dans un dispositif expérimental, on a classiquement d et D de l'ordre de 10 à 20 cm, a de l'ordre de quelques mm et une figure d'interférence qui mesure quelques cm sur l'écran. Ainsi, on peut considérer les distances d et D très supérieures aux autres : $d, D \gg a, x, y$.
- On se place dans l'air d'indice 1 : les chemins optiques sont directement égaux aux distances géométriques. Le calcul de la différence de marche se résume donc à des calculs de longueur.



Démonstration de la différence de marche à grande distance

- Définition et simplification par symétrie : Par définition, la différence de marche est la différence de chemin optique suivi par les rayons passant par les trous ① et ②. En décomposant, on a donc :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

or par symétrie $(SS_1) = (SS_2)$ donc :

$$\delta = (S_2M) - (S_1M)$$

Expression géométrique de la longueur S_1M

Les coordonnées des points extrêmes sont $S_1(a/2, 0, 0)$ et $M(x, y, D)$ donc :

$$\overrightarrow{S_1M} = \left(x - \frac{a}{2}\right)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + D\vec{e}_z$$

d'où

$$S_1M^2 = \overrightarrow{S_1M} \cdot \overrightarrow{S_1M} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2$$

et en développant on arrive à :

$$S_1M^2 = D^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2$$

Développement limité

$$S_1M = D \left(1 + \frac{x^2 - ax + a^2/4 + y^2}{D^2} \right)^{1/2}$$

$D \gg a, x, y$ d'où :

$$S_1M = D \left(1 + \frac{x^2 - ax + a^2/4 + y^2}{2D^2} \right)$$

Expression géométrique de la longueur S_2M

Une méthode analogue conduit à :

$$S_2M = D \left(1 + \frac{x^2 + ax + a^2/4 + y^2}{2D^2} \right)$$

Conclusion :

$$\delta = D \left(1 + \frac{x^2 + ax + a^2/4 + y^2}{2D^2} \right) - D \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2} \right) = \frac{ax}{D}$$

Dans un dispositif de trous d'Young distants de a le long d'un axe (Ox), placés dans l'air d'indice 1, la différence de marche en un point M d'un écran placé à une distance D des trous ne dépend que de sa coordonnée x et vaut :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

Ordre d'interférence et déphasage

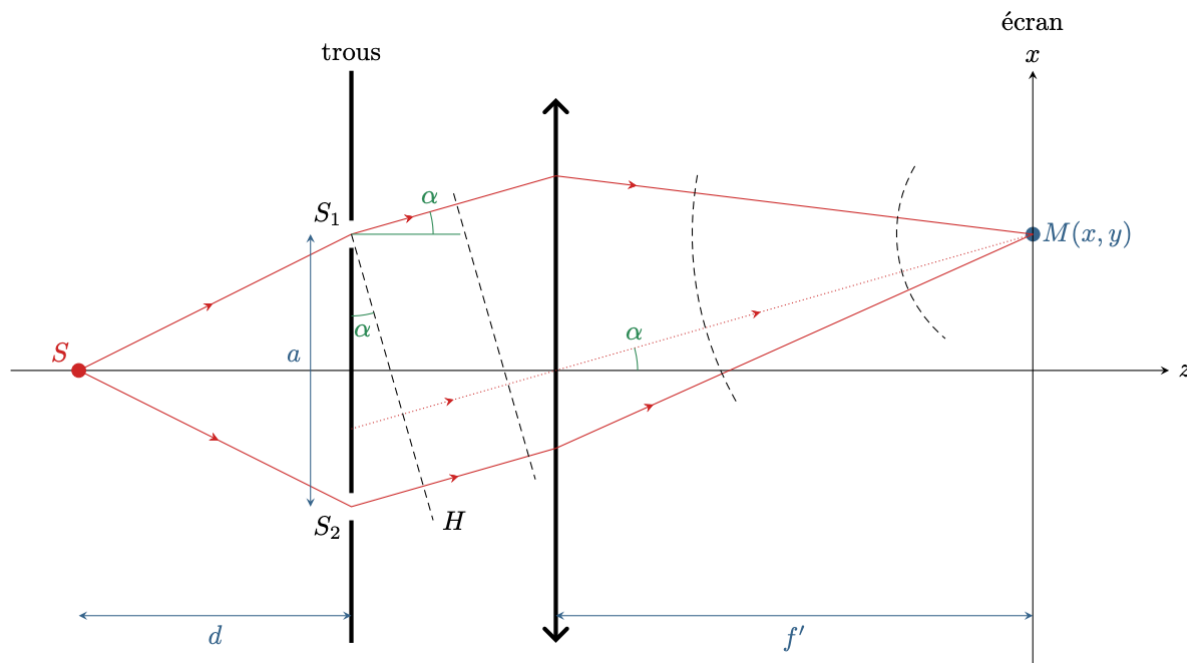
$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D} \quad \text{et} \quad \Delta\phi(M) = 2\pi p(M) = \frac{2\pi ax}{\lambda D}$$

2.3. Différence de marche à l'infini

Dans les exercices, il est fréquent de considérer que les sources secondaires se trouvent à l'infini par rapport à l'écran d'observation. Cela peut être une approximation d'une expérience réelle à l'échelle d'une salle de TP, ou bien un excellent modèle par exemple pour analyser des observations astronomiques.

Un autre cas fréquent est celui de l'observation des interférences dans le plan focal image d'une lentille.

Ce paragraphe a pour but de démontrer l'expression de la différence de marche dans cette dernière situation.



Construction des rayons qui interfèrent M

- Comme le point M se trouve dans le plan focal image de la lentille, alors on sait que les rayons qui y aboutissent sont tous parallèles les uns aux autres avant la lentille ;
- On construit le rayon en traits pointillés passant par le centre optique de la lentille : c'est un rayon fictif (il ne passe ni par S_1 ni par S_2 , donc il ne peut pas y avoir de lumière se propageant le long de ce rayon) ... mais comme il n'est pas dévié, il indique la direction de tous les rayons avant la lentille ;
- On en déduit le tracé des deux rayons qui interfèrent réellement : ce sont les deux rayons issus de S_1 et S_2 parallèlement au rayon pointillé et qui convergent ensuite vers M .

Utilisation du principe du retour inverse de la lumière en optique ondulatoire

Une fois les rayons tracés, le calcul de la différence de marche repose sur le principe du retour inverse de la lumière.

Principe du retour inverse de la lumière

Si la lumière allait du point d'observation vers la source, alors les rayons lumineux seraient les mêmes.

Il y a donc égalité des chemins optiques entre deux points A et B quel que soit le sens de parcours :

$$(AB) = (BA)$$

Graphiquement : si jamais la source était située au point d'observation, alors d'après le théorème de Malus les surfaces d'onde seraient en tout point orthogonales aux rayons qui aboutissent à la source.

On peut représenter des « surfaces d'onde inverses » sur la figure.

Conséquence sur les chemins optiques :

Si la lumière allait de M vers S , alors S_1 et H seraient dans le même plan d'onde, et donc $(MS_1) = (MH)$. D'après le principe du retour inverse, $(MS_1) = (S_1M)$ et $(MH) = (HM)$, d'où on déduit $(S_1M) = (HM)$.

Calcul de la différence de marche

Simplification du calcul :

$$\delta = [(SS_2) + (S_2H) + (HM)] - [(SS_1) + (S_1M)]$$

Pour simplifier le calcul, on admet que le résultat ne dépend pas de y (ce qui se justifie par invariance, ou par analogie avec le paragraphe précédent), ce qui permet de raisonner pour $y = 0$, et donc simplement dans le plan de la figure.

Idée de la démonstration : exprimer α de deux façons différentes, d'une part avec les sources secondaires, d'autre part avec le point M sur l'écran, et les identifier.

Relation trigonométrique dans le triangle rectangle S_1S_2H :

$$\sin \alpha = \frac{S_2H}{S_1S_2} = \frac{S_2H}{a}$$

Relation trigonométrique dans le triangle formé par O (centre de la lentille), le centre de l'écran, et M :

$$\tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

L'angle α étant petit, on peut linéariser et identifier les fonctions trigonométriques,

$$\frac{S_2H}{a} = \frac{x}{f'}$$

$$\delta = S_2H = \frac{ax}{f'}$$

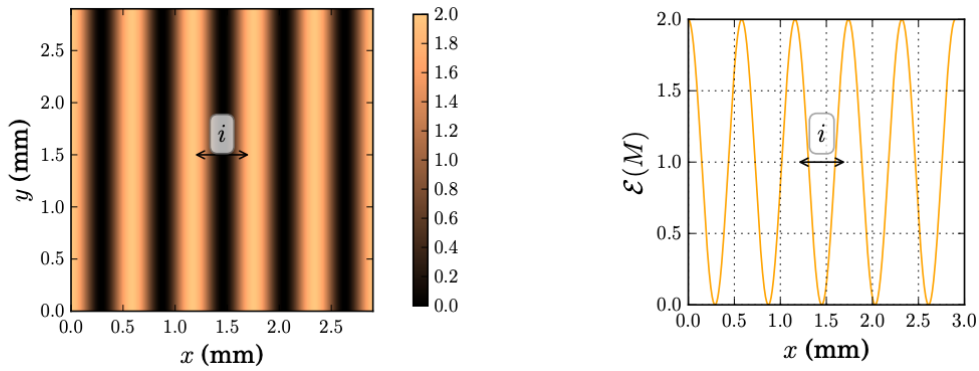
2.4. Figure d'interférences

On suppose se placer dans le cas de l'observation à grande distance, mais compte tenu de l'analogie des expressions des différences de marche, les résultats sont directement transposables au cas d'une observation à l'infini en remplaçant D par f' .

D'après la formule de Fresnel :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right] = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right]$$

L'éclairement est périodique en x mais il est indépendant de la coordonnée y de M , il est donc invariant par translation le long de cet axe : les franges sont rectilignes dans la direction (Oy) .



Expérience des trous d'Young. Simulation réalisée pour $\lambda = 580 \text{ nm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ mm}$.

On appelle **interfrange** i la période spatiale de la figure d'interférences.

L'interfrange correspond à la distance entre deux franges sombres ou deux franges brillantes consécutives.

$$\Delta\varphi(x + i) = \Delta\varphi(x) + 2\pi \quad p(x + i) = p(x) + 1 \quad \delta(x + i) = \delta(x) + \lambda$$

Application : Interfrange dans l'expérience des trous d'Young

1. Exprimer l'interfrange dans le cas des trous d'Young avec observation à une distance D .

$$p(x) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D}$$

$$\frac{a(x + i)}{\lambda D} = \frac{ax}{\lambda D} + 1$$

$$\frac{ai}{\lambda D} = 1$$

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

2. On prend une source de longueur d'onde 650 nm au lieu de 580 nm . Quel est l'effet visuel sur la figure d'interférences ?

L'interfrange augmente, donc la figure d'interférences semble qualitativement se dilater sur l'écran.

3. Même question si on utilise des trous plus rapprochés.

Même chose.

3. Extension spatiale de la source, cohérence spatiale

Utiliser une source de grande taille est a priori intéressant car cela permet d'augmenter la luminosité (ne pas confondre avec le contraste) de la figure d'interférences.

Une source étendue se modélise comme une juxtaposition de sources ponctuelles incohérentes, l'éclairement total étant la somme des éclaircissements issus de chaque point de la source.

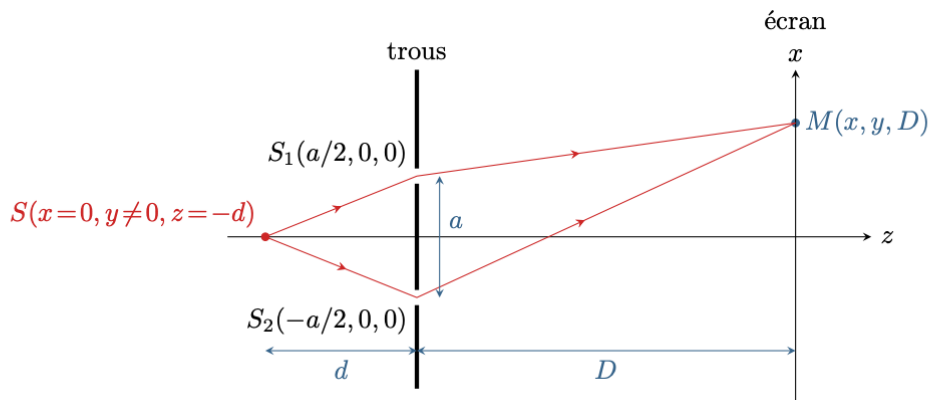
3.1. Source étendue parallèlement aux franges

On a montré que la figure d'interférences était indépendante de l'ordonnée y du point d'observation, donc que les franges étaient rectilignes dans cette direction. Ce paragraphe étudie l'effet de l'extension spatiale de la source en la supposant étendue selon (Oy) mais toujours infiniment fine selon (Ox) et placée en $x = 0$.

On suppose les trous d'Young toujours éclairés par une source ponctuelle monochromatique S , mais elle est désormais située en $Y \neq 0$, comme représenté sur la figure en vue « écrasée ». Malgré la translation selon (Oy) , la source primaire S est toujours dans le plan médiateur des trous d'Young donc on a toujours :

$$(SS_1) = (SS_2)$$

Une translation de la source selon (Oy) laisse la figure d'interférences inchangée.



Ainsi, deux sources décalées le long de l'axe (Oy) produisent exactement la même figure d'interférences, même si elles sont incohérentes, ce qui permet de doubler l'éclairement et donc de rendre la figure plus lumineuse ... et ce raisonnement tient pour un nombre quelconque de sources.

Utiliser une source étendue dans la direction parallèle aux franges est bénéfique, car cela augmente la luminosité de la figure d'interférences en préservant le contraste.

3.2. Source étendue perpendiculairement aux franges

3.2.1. Effet d'une translation de la source

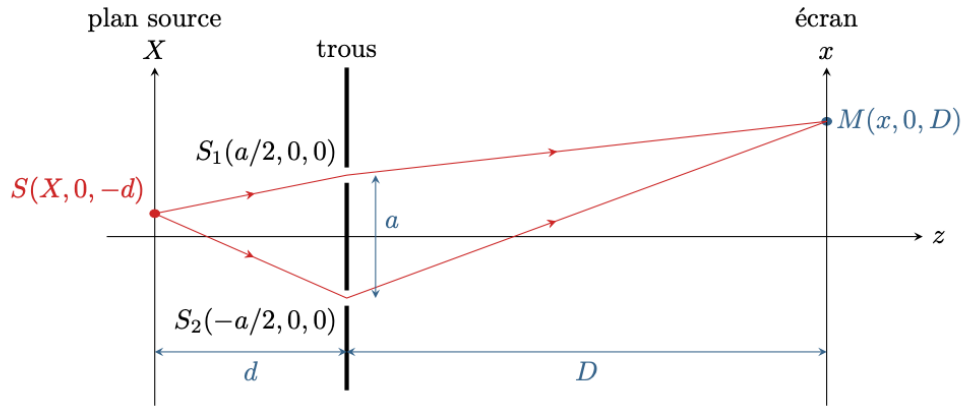
Application : Trous d'Young éclairés par une source décalée par rapport à l'axe optique

Considérons deux trous d'Young éclairés par une source ponctuelle décalée par rapport à l'axe optique du montage à une abscisse X . Compte tenu de l'invariance par translation selon (Oy) , on suppose pour alléger le calcul que la source, les trous d'Young et le point d'observation sont tous situés dans le plan $y = 0$.

1. En généralisant les résultats précédents, donner sans calcul la différence de marche en un point M de l'écran.

En décomposant les chemins optiques,

$$\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = [(SS_2) + (S_2M)] - [(SS_1) + (S_1M)] = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M)$$



Translation de la source dans la direction perpendiculaire aux franges.

On a montré que :

$$(S_2M) - (S_1M) = \frac{ax}{D}$$

La géométrie étant identique, on en déduit sans calcul que :

$$(SS_2) - (SS_1) = \frac{aX}{d}$$

et ainsi :

$$\delta = \frac{aX}{d} + \frac{ax}{D}$$

Déplacer la source augmente la différence de marche d'une constante indépendante du point d'observation.

2. Exprimer alors l'éclairement. Quel est l'impact de la translation de la source sur la figure d'interférences ?

D'après la formule de Fresnel,

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \right] = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{aX}{d}\right) \right]$$

Le terme impliquant la position X de la source est indépendant du point d'observation, il est donc égal en tout point de la figure d'interférences : tout se passe comme s'il y avait un « déphasage spatial » dans l'éclairement. Par analogie avec un signal sinusoïdal, on comprend que la figure d'interférences apparaît décalée sur l'écran.

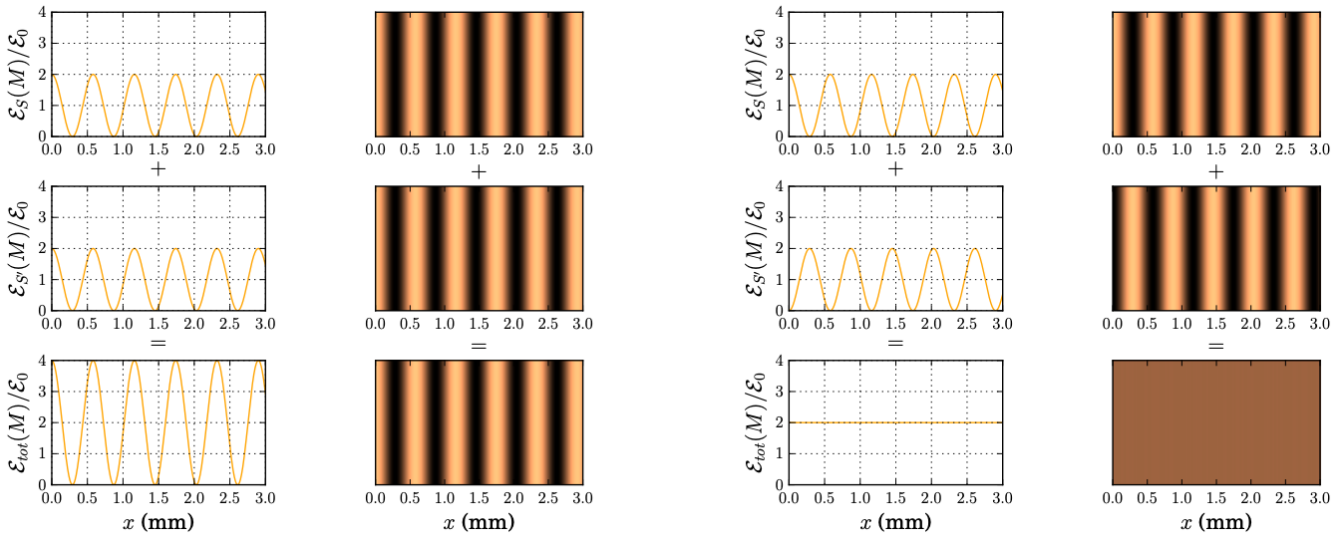
3.2.2. Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles

Application : Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles

Les trous d'Young sont maintenant éclairés par deux sources ponctuelles incohérentes, S et S' , symétriques par rapport à l'axe du montage, c'est-à-dire en $X = \pm b/2$. On note $p(M)$ et $p'(M)$ l'ordre d'interférence au point M correspondant à chacune des sources.

1. Indiquer qualitativement l'effet de la présence des deux sources sur la figure d'interférences.

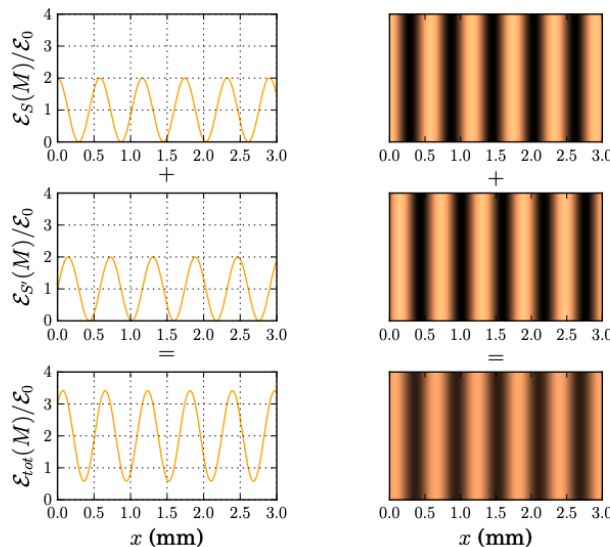
Cas extrêmes : La figure de gauche est tracée pour un décalage des figures d'interférences égal à i , si bien qu'elles paraissent identiques, et celle de droite pour un décalage égal à $i/2$, si bien qu'elles sont « en opposition de phase ».



Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles décalées.

Simulations réalisées pour $\lambda = 580 \text{ nm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ mm}$.

Cas quelconque : La figure est tracée pour un décalage des figures d'interférences égal à $i/4$.



Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles décalées.

Simulation réalisée pour $\lambda = 580 \text{ nm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ mm}$.

Conclusion qualitative :

- Les deux figures d'interférences issues des deux sources se superposent, mais comme elles sont décalées l'une par rapport à l'autre, cela conduit à une perte de contraste : les franges sombres ne sont pas parfaitement noires, les franges brillantes ne sont pas complètement lumineuses.
- La perte de contraste peut éventuellement aller jusqu'à un brouillage total de la figure d'interférences.

Attention ! « Brouillage total » n'est pas du tout synonyme de « interférences destructives ». Lorsque la figure d'interférences est totalement brouillée, l'éclairement sur l'écran est uniforme (il n'y a plus du tout d'interférences) mais non nul.

2. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran. Interpréter physiquement l'expression obtenue, en identifiant un terme d'interférences et un facteur de contraste.

Les deux sources S et S' sont placées de manière symétrique en $\pm b/2$ par rapport à l'axe optique du montage, donc en reprenant le calcul de l'application précédente

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = \frac{ab}{2d} + \frac{ax}{D}$$

$$\delta'(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = -\frac{ab}{2d} + \frac{ax}{D}$$

soit en termes d'ordre d'interférence

$$p(M) = \frac{ab}{2\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

$$p'(M) = -\frac{ab}{2\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

Éclairement total :

Les sources sont incohérentes mais chacun des deux éclairagements se calcule à partir de la formule de Fresnel.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= 2\mathcal{E}_0[1 + \cos(2\pi p)] + 2\mathcal{E}_0[1 + \cos(2\pi p')] \\ &= 2\mathcal{E}_0[2 + \cos(2\pi p) + \cos(2\pi p')] \\ &= 2\mathcal{E}_0 \left[2 + \cos\left(2\pi \frac{p+p'}{2}\right) \cos\left(2\pi \frac{p-p'}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Interprétation :

- Terme en $p + p'$:

$$\cos\left(2\pi \frac{p+p'}{2}\right) = \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)$$

Ce terme est identique à celui que l'on obtiendrait avec une seule source placée en $X = 0$, c'est-à-dire au milieu des deux sources S et S' . Il est appelé **terme d'interférences**. Il dépend de x , et donne la position des franges brillantes et sombres ainsi que l'interfrange, qui est inchangé par rapport au cas d'une unique source ponctuelle.

- Terme en $p - p'$

$$\cos\left(2\pi \frac{p - p'}{2}\right) = \cos\left(2\pi \frac{ab}{2\lambda d}\right)$$

Ce terme est indépendant de x , donc il prend la même valeur en tout point de l'écran. Il donne le contraste global de la figure d'interférences. Il est appelé **facteur de contraste**. Le contraste est égal à la valeur absolue du facteur de contraste.

3. À quelle condition sur p et p' la figure d'interférences est-elle totalement brouillée ?

Il y a brouillage total de la figure d'interférences si les franges sombres créées par une source se superposent aux franges brillantes créées par la deuxième source.

Le facteur de contraste s'annule si :

$$2\pi \frac{p - p'}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

soit

$$p - p' = n + \frac{1}{2}$$

3.2.3. Trous d'Young éclairés par une source étendue

Les résultats établis précédemment avec deux sources ponctuelles se généralisent :

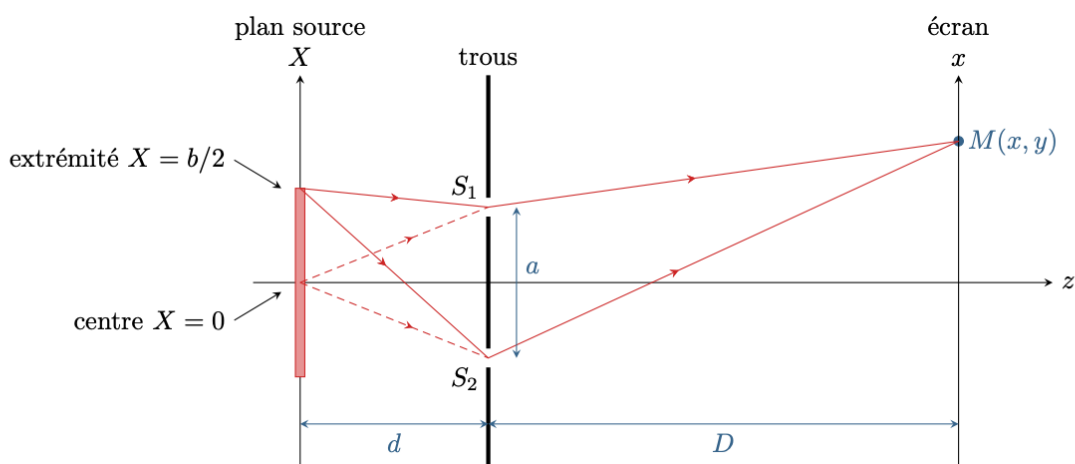
Lorsque les trous d'Young sont éclairés par une source étendue perpendiculairement aux franges, le décalage des figures d'interférences produites par chaque point de la source induit une perte de contraste qui peut aller jusqu'à un brouillage total.

Critère semi-quantitatif de brouillage (admis)

Par convention, la figure d'interférences formée par une source étendue est dite brouillée dès lors que la différence d'ordre d'interférences entre les ondes issues de son centre et de ses extrémités est supérieure à $1/2$

$$\Delta p = p_{ext}(M) - p_{centre}(M) > 1/2$$

La largeur de source à partir de laquelle le critère de brouillage prévoit une figure brouillée est appelée **largeur de cohérence spatiale** de la source.



Trous d'Young éclairés par une source étendue

Interprétation qualitative :

Lorsque ce critère est vérifié, il y a brouillage entre les figures d'interférences créées par certains points de la source. On comprend donc que cela dégrade le contraste.

Cas d'une fente source

Application : Trous d'Young éclairés par une source large

Considérons deux trous d'Young éclairés par une fente source de largeur b centrée sur l'axe optique.

1. Exprimer les ordres d'interférences $p_0(x)$ et $p_{b/2}(x)$ au point de l'écran d'abscisse x créés par les points de la source situés respectivement en $X = 0$ et $X = b/2$. En utilisant le critère de brouillage, en déduire la largeur de cohérence spatiale de la source.

$$p_{b/2}(x) = \frac{a \times b/2}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

$$p_0(x) = \frac{a \times 0}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

La figure d'interférences est brouillée lorsque :

$$\Delta p = \frac{ab}{2\lambda d} > \frac{1}{2}$$

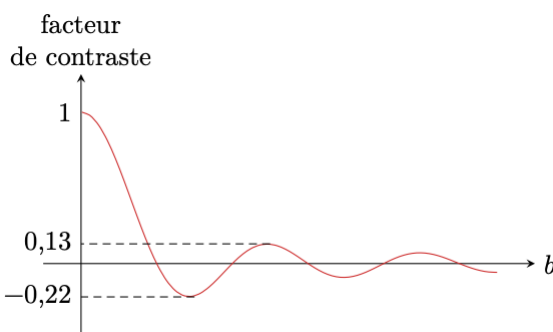
donc

$$b > \frac{\lambda d}{a} = b_c$$

2. Un calcul exact permet de montrer que l'éclairement au point M s'écrit :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left[1 + \frac{\lambda d}{\pi ab} \sin \frac{\pi ab}{\lambda d} \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$

Identifier un terme d'interférences et un facteur de contraste. Déterminer la valeur de b correspondant à la première annulation du facteur de contraste. Comparer les deux approches.



Première annulation de contraste :

$$\frac{\pi ab}{\lambda d} = \pi$$

soit

$$b > \frac{\lambda d}{a}$$

La largeur de cohérence spatiale de la source est celle qui donne la première annulation du contraste, ce qui est un bon ordre de grandeur : si $b > b_c = \lambda d/a$, le contraste ne dépasse pas 0,22, ce qui est peu.

Attention ! Ne pas croire pour autant que la figure d'interférences est « parfaitement » contrastée si la source est plus étroite que la largeur de cohérence spatiale et « pas du tout » si elle est plus large : la variation de contraste est un phénomène progressif.

Le critère semi-quantitatif de brouillage ne donne qu'un ordre de grandeur.

► **Pour approfondir** : Démontrons l'expression de l'éclairement observé sur l'écran en utilisant une source étendue de largeur b . Pour ce faire, découpons par la pensée la source étendue en bandes infinitésimales de largeur dX incohérentes les unes avec les autres. Supposons la source uniforme : l'éclairement $d\mathcal{E}_0$ produit sur l'écran par une bande de largeur dX en l'absence d'interférences est simplement proportionnelle à dX ,

$$d\mathcal{E}_0 = \alpha dX.$$

L'éclairement total \mathcal{E}_0 produit par la source en l'absence d'interférences vaut donc

$$\mathcal{E}_0 = \int d\mathcal{E}_0 = \int_{-b/2}^{b/2} \alpha dX = \alpha b \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{b}.$$

D'après la formule de Fresnel, l'élément de source situé en X produit en un point M de l'écran un éclairement

$$d\mathcal{E}(M) = 2 \frac{\mathcal{E}_0 dX}{b} [1 + \cos(2\pi p_X(M))] \quad \text{avec} \quad p_X(M) = \frac{aX}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

Les différentes bandes étant incohérentes,

$$\mathcal{E}(M) = \int d\mathcal{E}(M) = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{2\mathcal{E}_0}{b} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{d} + \frac{x}{D}\right)\right) \right\} dX$$

En calculant l'intégrale et à l'aide de la relation trigonométrique

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},$$

on aboutit au résultat donné précédemment, dans lequel on peut identifier un facteur de contraste et un terme d'interférences :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \underbrace{\frac{\lambda d}{\pi ab} \sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)}_{\text{contraste}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)}_{\text{interférences}} \right]$$

Le facteur de contraste est donné par la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, appelée *sinus cardinal*. Elle se rencontre très fréquemment dans le contexte de l'optique ondulatoire.

Remarquons par ailleurs que le facteur de contraste peut prendre des valeurs négatives : on parle d'*inversion de contraste*. Expérimentalement, si l'on augmente progressivement la largeur b de la source, l'inversion de contraste se manifeste par le fait que les franges sombres deviennent brillantes et réciproquement. ■

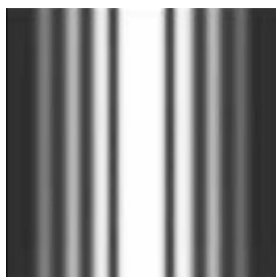
Conclusion générale

Utiliser une source étendue dans la direction perpendiculaire aux franges permet d'augmenter la luminosité de la figure d'interférences, mais au prix d'une diminution de contraste.

3.3. Fentes d'Young

Dans le but d'obtenir une figure plus lumineuse, on peut aussi poser la question d'élargir les objets diffractants en remplaçant les pupilles circulaires des trous d'Young par des fentes pour laisser passer plus de lumière. Les résultats précédents se généralisent sans peine.

Utiliser des fentes d'Young parallèles à la place de trous d'Young permet d'augmenter la luminosité de la figure d'interférences.



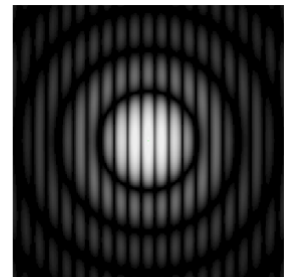
Une fente



Deux fentes



Un trou



Deux trous

Comparaison entre fentes d'Young et trous d'Young

Par ailleurs, si les fentes sont trop larges dans la direction perpendiculaire aux franges d'interférences alors la figure de diffraction risque de devenir trop étroite pour pouvoir observer correctement des interférences.

4. Réseaux par transmission

4.1. Principe : interférences à N ondes

Les dispositifs d'Young étudiés jusqu'à présent n'impliquent que deux chemins optiques différents pour aller de la source au point d'observation, ceux passant par les deux fentes ou trous d'Young.

Qu'en est-il si l'on utilise un dispositif permettant à N rayons lumineux d'interférer ?

Observation expérimentale :



Figure obtenue par passage d'un laser au travers de 1 à 6 fentes.

Plus le nombre de fentes est élevé, plus les tâches brillantes sont lumineuses.

Plus il y a de fentes au travers desquelles la lumière peut passer, plus celle-ci se retrouve concentrée sur les points les plus lumineux. Ces points coïncident avec la position des franges brillantes lors du passage au travers de deux fentes.

On appelle **réseau optique** un instrument constitué d'une série de motifs identiques, répétés périodiquement, permettant la réflexion ou la transmission d'ondes lumineuses.

La répétition est caractérisée par la période spatiale du réseau a , appelée **pas du réseau**, ou par la fréquence spatiale $n = 1/a$, usuellement nommée **nombre de traits par millimètre**.

Ordre de grandeur :

Les réseaux usuels comptent quelques centaines voire quelques milliers de traits par millimètre.

Restrictions de notre étude :

Dans toute la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

- on ne s'intéresse qu'aux réseaux par transmission ;
- dans la pratique expérimentale, la source permettant d'éclairer le réseau est toujours située au foyer objet d'une lentille : le réseau est utilisé en éclairage parallèle ;
- dans la pratique expérimentale, l'observation se fait toujours dans le plan focal image d'une lentille de projection : les interférences sont observées à l'infini, ce sont des rayons parallèles qui interfèrent.

4.2. Formules des réseaux

Différence de marche entre motifs consécutifs

Attention ! Comme tous les angles sont algébriques, il faut les dessiner positifs sur le schéma pour que le calcul se passe correctement au niveau des signes. Ainsi, les rayons doivent « arriver du bas » et « repartir vers le haut ».

Calculons la différence de marche entre deux motifs consécutifs, notés S_j et S_{j+1} :

$$\delta = (SS_{j+1}M) - (SS_jM)$$

La source primaire S est situé à l'infini, donc d'après le théorème de Malus les points K et S_{j+1} appartiennent au même plan d'onde. Ainsi,

$$(SK) = (SS_{j+1})$$

Par ailleurs, l'observation se fait à l'infini. Si la lumière venait du point d'observation, alors d'après le principe de retour inverse et le théorème de Malus les points S_j et H appartiendraient au même plan d'onde. Ainsi,

$$(S_jM) = (HM)$$

Ainsi,

$$\delta = [(SS_{j+1}) + (S_{j+1}H) + (HM)] - [(SK) + (KS_j) + (S_jM)]$$

Avec la trigonométrie habituelle,

$$\sin \theta_i = \frac{KS_j}{a} \quad \text{et} \quad \sin \theta_t = \frac{S_{j+1}H}{a} \quad \text{d'où} \quad \delta = a(\sin \theta_t - \sin \theta_i)$$

Position des franges brillantes :

Pour un grand nombre de traits éclairés, les maxima sont très concentrés : on ne s'intéresse donc qu'à la position des franges brillantes. Comme les motifs sont répartis régulièrement, alors la différence de marche entre deux motifs consécutifs est partout la même.

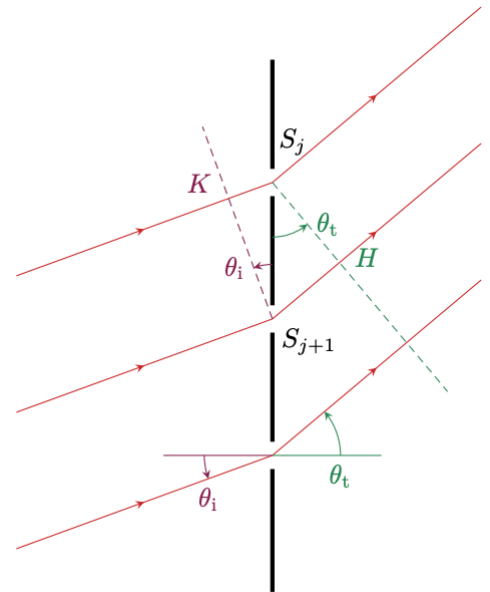
Si les ondes issues des motifs j et $j + 1$ sont en phase, alors celle issue du motif $j + 2$ est en phase avec celle de $j + 1$ et donc également avec celle de j ...

Les motifs étant régulièrement répartis, si les ondes issues de deux motifs consécutifs du réseau sont en phase au point d'observation, alors toutes les ondes issues de tous les motifs sont en phase en ce point.

Pour déterminer la position des maxima d'intensité en sortie du réseau, il suffit d'établir la condition d'interférences constructives entre deux motifs consécutifs.

Condition d'interférences constructives :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}(\sin \theta_t - \sin \theta_i)$$



Notations spécifiques aux réseaux :

L'angle de transmission dans la direction donnant un ordre d'interférences p est noté θ_p plutôt que θ_t .

De plus, si l'angle d'incidence est égal à l'angle de transmission alors on trouve directement $p = 0$ soit $\theta_0 = \theta_{p=0} = \theta_i$. Ainsi, l'angle d'incidence est traditionnellement noté θ_0 . Plus généralement, on se méfiera du léger glissement de notations et de vocabulaire entre les interférences à deux ondes et les réseaux.

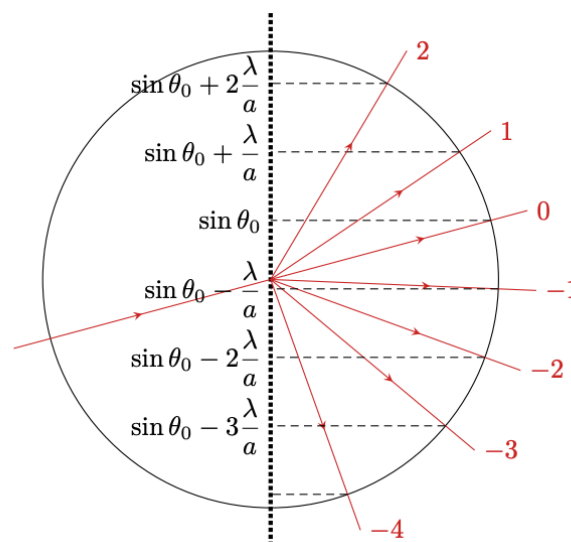
Formule des réseaux :

Les raies brillantes en sortie d'un réseau apparaissent dans les directions telles que :

$$\sin \theta_p - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda}{a} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

La valeur de p est appelée **ordre** de la raie.

La direction des maxima est représentée sur la figure ci-dessous :



Direction des maxima d'intensité en sortie d'un réseau.

On identifie en ordonnée $\sin \theta_p$ ($p \in \mathbb{Z}$) à partir de $\sin \theta_0$, puis la direction des rayons par analogie avec le cercle trigonométrique. Un sinus devant être inférieur à 1, le nombre d'ordres visibles est nécessairement limité.

4.3. Utilisation en spectroscopie

Idée de physique

La position des ordres du réseau dépend de la longueur d'onde : un réseau peut donc être utilisé pour séparer spatialement les différentes composantes spectrales d'une lumière incidente.

D'après la formule des réseaux,

$$\sin \theta_p - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{a}{p} (\sin \theta_p - \sin \theta_0)$$

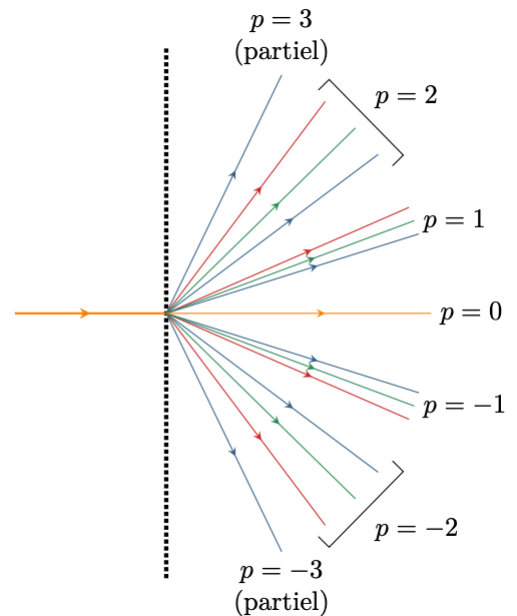
Connaissant a (ou plus souvent le nombre de traits par millimètre $n = 1/a$), en ayant repéré le numéro p de l'ordre et mesuré la position angulaire θ_p des raies brillantes, on peut en déduire la longueur d'onde correspondante.

« Dispersion » par le réseau

Dans un ordre donné, plus la longueur d'onde est grande, plus elle apparaît déviée par le réseau. Les longueurs d'onde sont d'autant plus séparées que l'ordre est élevé.

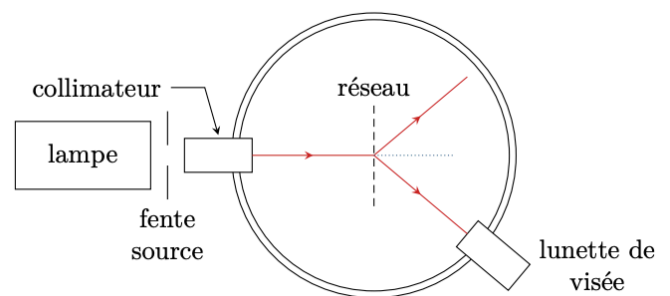
Attention ! Il ne s'agit pas du tout d'une déviation géométrique comme peut le faire un prisme, mais bien d'un phénomène d'interférences. Cependant, l'abus de langage est permis par l'analogie des observations : « un réseau dévie davantage le rouge que le bleu ».

- Certains ordres peuvent ne pas apparaître en entier sur l'écran si certaines raies sont déviées : c'est par exemple le cas des ordres ± 3 de la figure ci-contre.
- Dans certains cas, on rencontre également du recouvrement d'ordres : les raies les plus déviées de l'ordre n sont davantage déviées que les raies les moins déviées de l'ordre $n + 1$. Les ordres apparaissent alors mélangés.



Exemple de montage

On peut par exemple utiliser un montage à goniomètre. Le collimateur permet d'obtenir une source à l'infini à partir d'une lampe spectrale, et la lunette de visée d'observer à l'infini. Le vernier du goniomètre permet de mesurer précisément les positions angulaires des différentes raies. Une méthode efficace est celle du minimum de déviation.

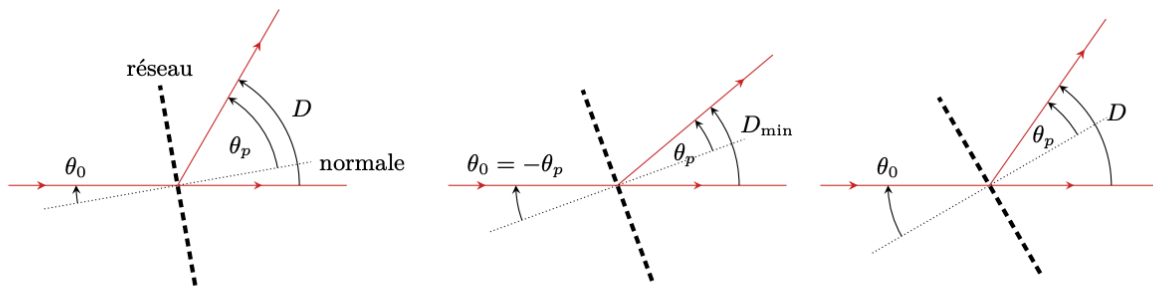


Montage de spectrométrie à réseau utilisant un goniomètre.

On retrouve de gauche à droite la lampe à analyser, le collimateur, le réseau et la lunette de visée.

► **Pour approfondir** : Mesurer une longueur d'onde à l'aide d'un réseau peut en principe être réalisé avec une bonne précision par exploitation directe de la formule des réseaux. Cependant, en pratique, la mesure précise des angles θ_p et θ_0 n'est pas aisée car elle nécessite un repérage précis de la normale au réseau. Une méthode plus efficace consiste à étudier la *dévi*ation par le réseau, définie comme l'angle que forme le rayon émergent par rapport au rayon incident,

$$D = \theta_p - \theta_0 .$$



Montrons que l'angle de déviation d'une raie donnée (p fixé) passe par un minimum pour une valeur de θ_0 bien choisie, comme illustré sur la figure ci-dessus. Les angles D et θ_p sont vus comme des fonctions de l'angle θ_0 . Lorsque la déviation est minimale,

$$\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{d\theta_p}{d\theta_0} - 1 \underset{\text{min}}{=} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{d\theta_p}{d\theta_0} \underset{\text{min.dév.}}{=} 1 .$$

De plus, en dérivant la formule des réseaux par rapport à l'angle d'incidence θ_0 pour un ordre $p = \text{cte}$, on obtient

$$\frac{d\theta_p}{d\theta_0} \times \cos \theta_p - \cos \theta_0 = 0$$

Au niveau du minimum de déviation, $d\theta_p/d\theta_0 = 1$ donc

$$\cos \theta_p - \cos \theta_0 \underset{\text{min.dév.}}{=} 0 \quad \text{soit} \quad \theta_p \underset{\text{min.dév.}}{=} \pm \theta_0 .$$

Seul le signe $-$ est physiquement intéressant, car le signe $+$ correspond à une déviation nulle, c'est-à-dire à l'ordre 0 qui n'est pas pertinent ici. Ainsi, dans la situation où la déviation est minimale,

$$D_{\text{min}} = \theta_p - \theta_0 = 2\theta_p \quad \text{d'où} \quad \theta_p = -\theta_0 = \frac{D_{\text{min}}}{2} .$$

En reprenant la formule des réseaux, on a alors

$$2 \sin \frac{D_{\text{min}}}{2} = \frac{p\lambda}{a} .$$

On montre ainsi que mesurer la déviation minimale d'une raie permet d'en déduire sa longueur d'onde. ■