TD Interférences par division du front d'onde

Trous d’Young et dispositifs analogues

Exercice 1 : Interféromètre de Rayleigh

L’interféromètre étudié dans cet exercice a été conçu à la fin du XIX^{e} siècle par lord Rayleigh en vue de déterminer l’indice optique de gaz. Il est directement dérivé du dispositif des fentes d’Young. Une source primaire S monochromatique ($\lambda = 577\,\text{nm}$) est placée au foyer objet d’une lentille L_1 et éclaire deux fentes O_1 et O_2 de grande dimension dans la direction (Oy) distantes de a. Les interférences sont observées dans le plan focal image d’une seconde lentille L_2. Deux cuves de même longueur $\ell = 20{,}0\,\text{cm}$ contenant les gaz étudiés sont intercalées entre la lentille L_1 et les fentes.

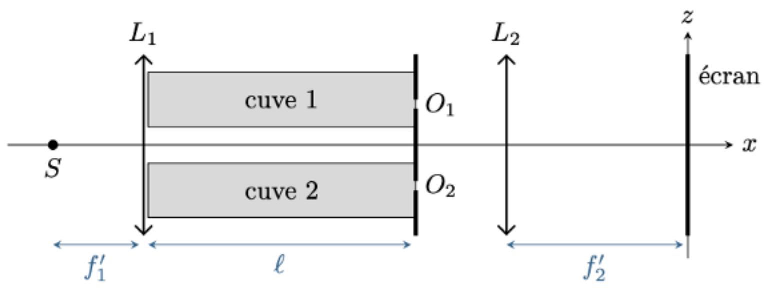


Schéma de principe de l'interféromètre de Rayleigh.

1 - Représenter sur le schéma les deux rayons qui interfèrent en un point de l’écran d’ordonnée z quelconque.

2 - En notant n_1 et n_2 les indices des gaz contenus dans les cuves, déterminer la différence de marche $\delta(z)$.

3 - Déterminer l’interfrange. Sa mesure peut-elle être utilisée pour déterminer les indices des gaz ?

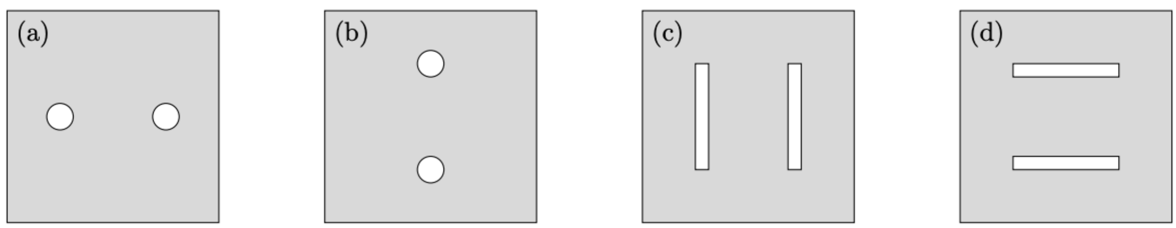
Cet interféromètre peut être utilisé pour mesurer l’indice n_{air} de l’air. Pour cela, le vide est fait dans la cuve 2. On repère alors sur l’écran un point M où se trouve une frange brillante, puis on laisse la cuve 2 se remplir lentement d’air. Au cours de l’expérience, on observe alors le défilement en M de 101 franges brillantes, et en fin d’expérience la frange d’interférences y est sombre.

4 - Que valent les indices n_1 et n_2 en début d’expérience ? en fin d’expérience ? Expliquer pourquoi les franges d’interférences semblent défiler en M pendant que la cuve se remplit.

5 - En déduire l’indice n_{air} de l’air.

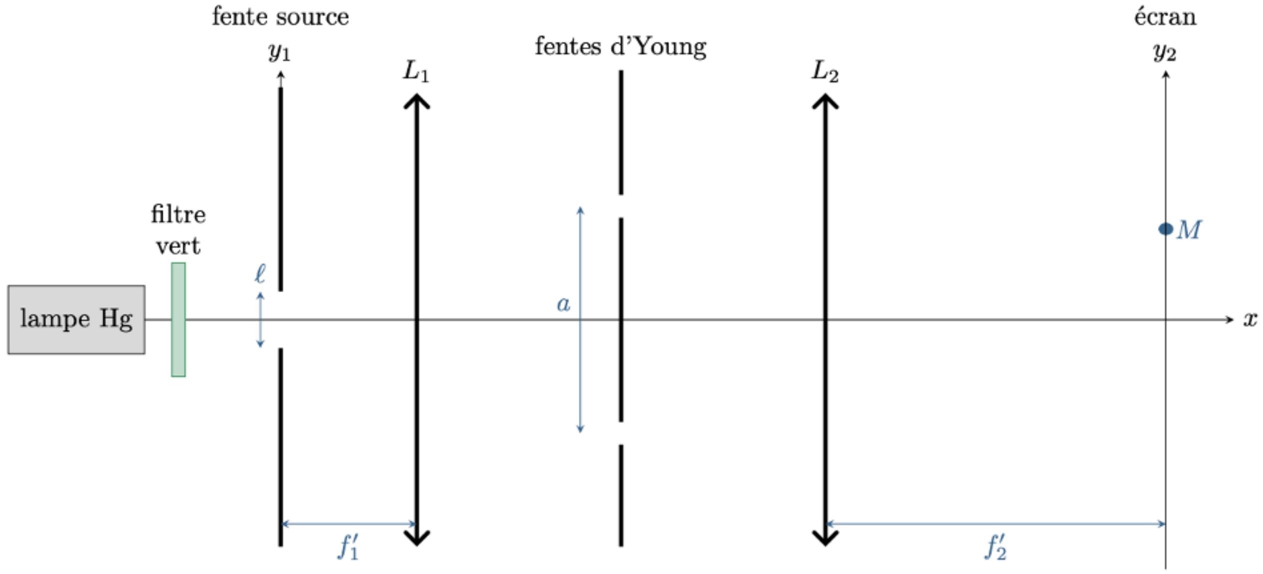
Exercice 2 : Figures d’interférences

On éclaire un dispositif d’Young (trous ou fentes) en lumière monochromatique. Représenter l’allure de la figure d’interférences observée sur un écran à grande distance pour chacun des dispositifs ci-dessous.



Exercice 3 : Démonstration ondulatoire de la loi de la réfraction

On étudie le dispositif schématisé figure 3, dans lequel une lampe au mercure suivie d'un filtre vert éclaire un dispositif de fentes d'Young de grande hauteur dans la direction z. La taille apparente de la lampe source est imposée par une fente de largeur réglable ℓ : l'ensemble lampe, filtre et fente source est équivalent à une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ_0. Cette source est placée dans le plan focal objet d'une lentille L_1, ce qui permet d'éclairer les fentes d'Young en lumière parallèle. Les interférences sont observées dans le plan focal image d'une lentille L_2. Le dispositif est supposé invariant par translation le long de l'axe z. On définit deux axes y_1 dans le plan de la fente source et y_2 dans le plan de l'écran.



Fentes d'Young éclairées en lumière parallèle.

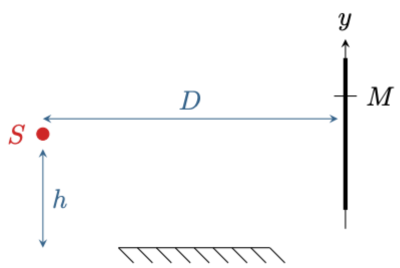
1 - Tracer sur la figure la marche des deux rayons issus de l'extrémité haute de la fente source qui interfèrent au point M.

2 - Montrer que l'ordre d'interférence pour les rayons issus d'un point d'ordonnée y_1 de la fente source et qui interfèrent au point d'ordonnée y_2 de l'écran vaut

$$p = \frac{a}{\lambda_0}\left(\frac{y_1}{f'_1} + \frac{y_2}{f'_2}\right).$$

3 - En déduire l'expression de la largeur de cohérence spatiale de la fente source.

Exercice 4 : Miroir de Lloyd



Le dispositif de Lloyd permet d'obtenir des interférences à deux ondes. Il consiste en un miroir plan et un écran, éclairés par une source S supposée ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ placée très proche du miroir. On indique que la réflexion sur le miroir entraîne un déphasage de π de l'onde réfléchie, ou de façon équivalente augmente le chemin optique de $\lambda/2$.

1 - Montrer que le dispositif est équivalent à des trous d'Young. On pourra faire intervenir l'image S' de la source S par le miroir.

2 - Déterminer au point M la différence de marche, l'ordre d'interférences et l'intensité. En déduire l'interfrange i.

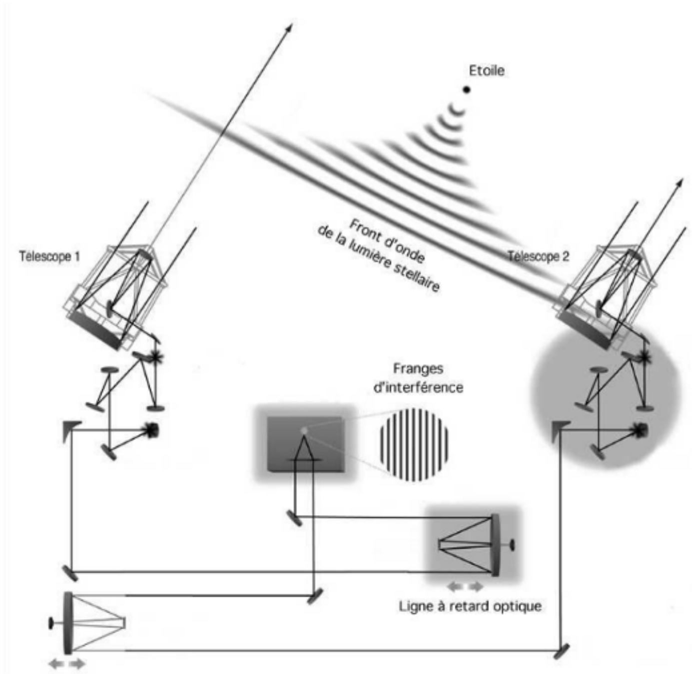
3 - On décale la source de Δh et on mesure $i' = 1{,}5i$. Décrire la nouvelle figure d'interférences et exprimer la longueur d'onde λ en fonction des données du problème [1].

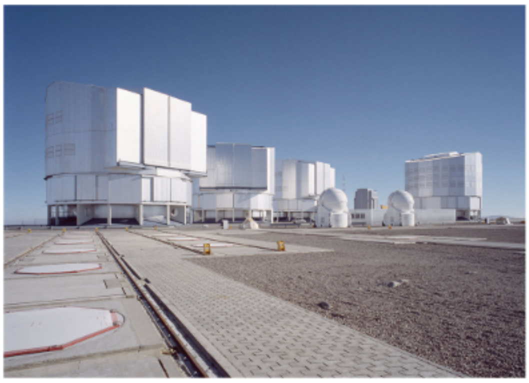
4 - On remplace la source ponctuelle par une fente. Que devient la figure d'interférences ?

Exercice 5 : Interférométrie stellaire

Le Très Grand Télescope de l'Observatoire européen austral (ESO), en anglais *Very Large Telescope* (VLT), est un ensemble de quatre télescopes principaux et quatre auxiliaires. Il est situé à l'Observatoire du Cerro Paranal dans le désert d'Atacama, au nord du Chili, à une altitude de 2635 m.

En combinant deux télescopes, il est possible de le faire fonctionner comme un interféromètre. Par un complexe jeu de miroirs et de fibres optique, les ondes issues de l'étoile observée captées par les deux télescopes sont recombinées dans le laboratoire central de l'installation, où elles interfèrent. L'étude de la figure d'interférences générée donne alors accès à diverses informations sur l'étoile étudiée. Pour faire varier la différence de marche, les deux télescopes peuvent coulisser sur des rails longs de 65 m et rectilignes à mieux que 25 µm, ce qui permet de les séparer d'une distance allant jusqu'à 200 m.





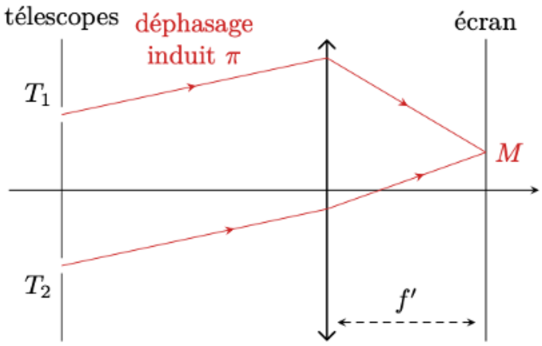


Schéma de principe et photo du VLT.

Une modélisation équivalente du dispositif est celle d'un dispositif de trous d'Young, séparés d'une distance a variable, produisant des interférences observées dans le plan focal image d'une lentille équivalente. Les miroirs rencontrés sur le chemin des rayons réels induisent un déphasage additionnel de π entre les deux rayons.

Considérons dans un premier temps que l'interféromètre observe une étoile E_1 ponctuelle située à l'infini sur l'axe optique du montage, qui émet une radiation infra-rouge monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 2{,}0\,\mu\text{m}$.

1 - Les rayons reçus par les deux télescopes sont-ils cohérents ? Montrer que la différence de chemin optique entre les deux rayons s'écrit

$$\delta_1(x) = \frac{ax}{f'} + \frac{\lambda}{2}\,.$$

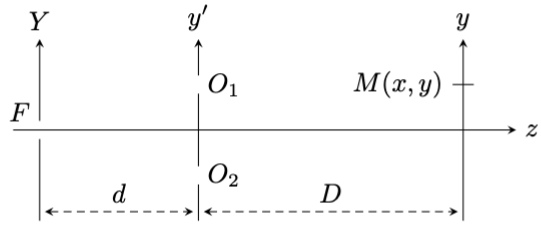
2 - En déduire l'intensité en tout point de l'écran, dont on notera I_0 la moyenne.

Cette étoile est en fait l'une des composantes d'une étoile double, c'est-à-dire d'une paire d'étoiles en orbite l'une autour de l'autre. Les étoiles E_1 et E_2 sont supposées identiques, les rayons issus de E_2 arrivant sur l'interféromètre en formant un angle α avec l'axe optique.

3 - Les rayons issus de E_1 et E_2 sont-ils cohérents ? Calculer l'intensité en tout point de l'écran. Commenter.

4 - Proposer une méthode de détermination de l'angle α reposant sur les brouillages de la figure d'interférences. En appliquant cette méthode, quelle serait la limite de résolution angulaire du télescope, c'est-à-dire le plus petit écart $\alpha_{\min}$ qu'il serait en mesure de détecter ?

Exercice 6 : Fentes d'Young éclairées par une fente source



Considérons le dispositif de fentes d'Young ci-contre, en posant $a = O_1O_2$. On suppose d et D sont très supérieures à a. On considère dans un premier temps la source F ponctuelle.

1 - Qu'observe-t-on sur l'écran ?

2 - Déterminer l'intensité I en un point M de l'écran.

On considère désormais que F est une fente source comprise entre $Y = -\varepsilon$ et $Y = \varepsilon$. On la modélise comme une juxtaposition de bandes infinitésimales de largeur $\mathrm{d}Y$ incohérentes les unes avec les autres. Une bande de largeur $\mathrm{d}Y$ émettant une intensité $\mathrm{d}I = \mathcal{I}_Y \,\mathrm{d}Y$.

3 - Expliquer qualitativement pourquoi on observe un brouillage progressif sur l'écran. Estimer la largeur de cohérence spatiale ε_c à partir de laquelle la figure d'interférences est brouillée.

4 - Justifier que l'intensité en un point M de l'écran peut s'écrire sous la forme

$$I(M) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{I}_0 \left[1 + \cos\left\{\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{y}{D} + \frac{Y}{d}\right)\right\}\right] \mathrm{d}Y$$

5 - Procéder au calcul. Identifier un terme d'interférences et un facteur de contraste.

6 - Quelle est la première valeur de ε pour laquelle il y a brouillage ?

Donnée : $\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$.

Réseaux

Exercice 7 : Spectrométrie à réseau

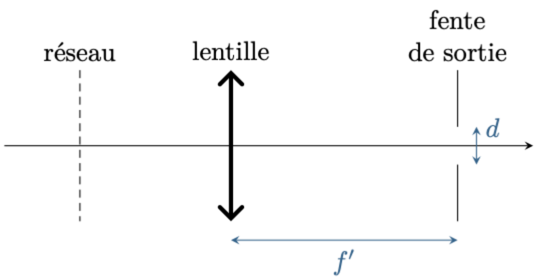
On souhaite déterminer la longueur d'onde λ de la raie du cadmium avec un réseau comptant $n = 500$ traits par millimètre.

1 - Décrire un montage expérimental simple pour trouver cette longueur d'onde.

2 - Établir la formule des réseaux.

3 - On se place en incidence normale. On observe l'ordre -2 et l'ordre 2 séparés d'un angle $\alpha = 61°9'$, où $1' = 1/60°$. Déterminer λ.

Exercice 8 : Monochromateur à réseau



Un monochromateur à réseau est un dispositif optique permettant de produire une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 réglable à partir d'une radiation polychromatique. On les retrouve par exemple dans tous les spectromètres destinés à l'identification d'espèces chimiques. Pour des raisons pratiques la plupart des monochromateurs utilisent des réseaux par réflexion, qui maximisent l'intensité lumineuse en sortie. Nous allons en étudier le principe sur le modèle simplifié représenté ci-contre, reposant sur un réseau par transmission.

Un réseau en transmission à $n = 500$ traits par millimètre est éclairé en éclairage parallèle par une source de lumière blanche non représentée sur le schéma. Les rayons incident et émergent forment respectivement des angles i_0 et i avec l'axe optique orthogonal au réseau. On cherche à isoler la longueur d'onde $\lambda_0 = 500\,\mathrm{nm}$.

1 - On souhaite observer l'ordre 2 sur l'axe optique pour la longueur d'onde λ_0 à isoler. En déduire l'inclinaison i_0 à donner à la source.

2 - Considérons un rayon de longueur d'onde $\lambda_0 + \delta\lambda$ avec $\delta\lambda \ll \lambda_0$. Déterminer l'angle i avec lequel il émerge du réseau. En déduire la dispersion angulaire du réseau au voisinage de λ_0, qui s'exprime en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{nm}^{-1}$.

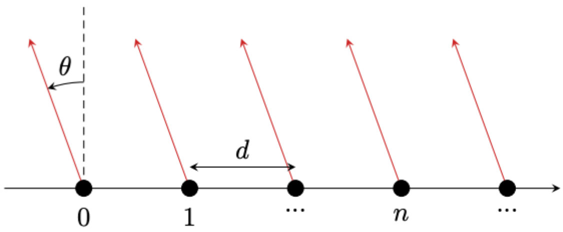
En sortie du réseau se trouvent une lentille convergente et une fente de sortie de largeur d située dans le plan focal image de la lentille.

3 - Déterminer les angles en sortie du réseau des rayons passant par les deux extrémités de la lentille. En déduire la résolution $\Delta\lambda$ du monochromateur, c'est-à-dire la largeur spectrale du faisceau de sortie.

4 - Comment choisir la largeur de la fente de sortie pour obtenir la radiation la plus pure possible ? En pratique, un compromis est à trouver : expliquer.

5 - Comment choisir la distance focale de la lentille pour obtenir la radiation la plus pure possible ?

Exercice 9 : Réseau linéaire d'antennes



De nombreuses utilisations des ondes électromagnétiques demandent une bonne directivité : télécommunications, radar, radioastronomie, etc. Pour l'obtenir, on peut notamment associer plusieurs antennes élémentaires en réseau, ce qui est préférable à une antenne unique dont le rayonnement est très peu directif. C'est ce qu'exploitent par exemple les antennes de télévision en « rateau », mais pour la réception. Des dispositifs analogues avec les ondes acoustiques sont utilisés dans les sondes d'échographie.

On s'intéresse dans cet exercice à un modèle simplifié de réseau linéaire de N antennes indicées de 0 à $N-1$, séparées d'une distance d. En première approche, on suppose que chaque antenne émet un rayonnement de longueur d'onde λ, isotrope dans le plan horizontal, toutes les antennes émettant en phase. On s'intéresse à l'onde totale en un point M, situé à grande distance du réseau, dans une direction formant un angle θ avec la normale au réseau. L'onde issue de l'antenne de référence 0 est prise comme référence :

$$s_0(M,t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

1 - Montrer que le déphasage ϕ_1 entre l'onde 0 et l'onde 1 au point M vaut

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta\,.$$

En déduire sans calcul le déphasage entre l'onde 0 et l'onde n au point M.

2 - Montrer que l'amplitude totale au point M est donnée par

$$s(M,t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\phi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}}\,\frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}\,.$$

En déduire l'intensité correspondante.

3 - Déterminer les directions dans lesquelles se trouvent les maxima d'intensité émis par le réseau d'antenne. Comment choisir d pour n'avoir qu'un unique maximum ? On supposera pour la suite $d = \lambda/2$.

Donnée : la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{\sin x}$ est maximale pour $x = m\pi, m \in \mathbb{Z}$, et est alors égale à a.

4 - Pour un réseau de N antennes, que vaut l'intensité au niveau d'un maximum ? Déterminer la largeur angulaire $\Delta\theta$ du pic de rayonnement correspondant, définie comme l'écart angulaire entre les deux annulations d'intensité de part et d'autre du maximum. Commenter l'influence du nombre d'antennes formant le réseau.

5 - Pour contrôler la direction du maximum de rayonnement, les ondes émises par les antennes peuvent être déphasées : outre le déphasage géométrique précédemment discuté, le champ émis par deux antennes successives est déphasé de $\psi =$ cte. Déterminer l'angle auquel se trouve le maximum d'intensité.