Colle 19

vendredi 21 novembre 2025 17:34

En vrac

1) Vrai, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = PBP^{-1}$

Donc $A^p = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \dots (PBP^{-1}) = PB^pP^{-1}$

Donc $\boxed{A^p \text{ et } B^p \text{ sont semblables}}$

2) Vrai, $\exists (Q, P) \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = PBQ^{-1}$ avec $Q = P$

3) vrai, on comprend aisément que rang $A \leq p$ (nbre de colonnes)

Et comme $rg A = rg\, {}^tA$ alors $rg A \leq n$

Finalement : $rg(A) \leq \min(n, p)$

4) vrai, c'est un résultat du cours, on peut préciser qu'elle est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ où r représente le rang de A.

Exo n°1

1)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) AB = Impossible mais :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exo n°2

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_1 + c_4$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_2 + c_3$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_3 - 2c_4$

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} c_4 & c_2 & c_1 & c_3 \end{matrix} \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$c_4 + 3c_3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$c_2 - c_4$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$c_1 - c_4$

$$M : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$-c_3 \quad -c_4$

Donc $\boxed{M \text{ inversible et } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Exo n°3

1) une récurrence immédiate donne le résultat ! $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mq $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence

- vraie pour $n = 2$, $n = 3$
- on suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{cl : Par récurrence, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Exo n°4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 10 & -3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$aA + bI_3 = \begin{pmatrix} 0+b & a & -a \\ -3a & 4a+b & -3a \\ -a & a & 0+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 10 & -3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

D'où : $b = -2$

$a = 3$

$\boxed{A^2 = 3A - 2I_3}$

2) $A(A - 3I_3) = -2I_3$

$A\left(\dfrac{A - 3I_3}{-2}\right) = I_3$

$\boxed{\text{Donc } A \text{ inversible et } A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_3)}$

3) $(A - I_3)(A - 2I_3) = A^2 - 2A - A + 2I_3$

$= A^2 - 3A + 2I_3$

$= 0$

Donc $\boxed{A - I_3 \text{ et } A - 2I_3 \text{ non inversibles}}$