Chapitre 7 A: Equations différentielles linéaires du premier ordre

I. Généralités

Soit I in intervalle de $\mathbb{R}$, a,b: $I \to K$ des applications continues, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que J soit inclus dans I, et y : $J \to K$ une application

On dit que y est solution sur J de l'équation différentielle (E)du premier ordre :

y'+ay = b

Si et seulement si y est dérivable sur J et : $\forall x \in J, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$

Il arrive que l'on ait à résoudre des équations différentielles de la forme :

$\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$ où les fonctions α, β, γ sont continues sur I.

Dans ce cas, on se place sur un intervalle I' inclus dans I, sur lequel la fonction α ne s'annule pas et l'on se ramène à une équation de la forme ay'+by = c

avec a $= \frac{\beta}{\alpha}$, b $= \frac{\gamma}{\alpha}$

A chaque équation (E), on peut associer une équation (E_0) dite équation homogène à (E) définie par : y'+ay = 0

Résoudre (E), c'est déterminer pour chaque intervalle J⊂I, l'ensemble des solutions de (E) sur J.

1) Proposition :

   L'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène (E_0) est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire qu'il vérifie : $\forall (f_1, f_2) \in {S_0}^2, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$, $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in S_0$

   Démonstration : Reprendre la démonstration du premier chapitre sur les équations différentielles

2) Proposition

   Si f_1 est une solution de (E) et si S_0 désigne l'ensemble des solutions de (E_0), alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est S = {f_1+g/g∈ S_0}

   Remarque : Comme $f_1 + S_0 = S$, l'ensemble $f_1 + S_0$ ne dépend pas de la solution f_1 choisie.

   Démonstration : Reprendre la démonstration du premier chapitre sur les équations différentielles

II. Résolution

Le plan de résolution est le même que celui pour les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

1) Résolution de l'équation homogène
   a) Soit S_0 l'ensemble des solutions de E_0 sur I, alors $S_0 = \{I \to K, x \to \lambda e^{-\int a dx};\ \lambda \in K\}$

Remarque : Nous verrons dans un prochain chapitre que S_0 a une structure de K-espace vectoriel de dimension 1 (c'est-à-dire qu'il correspond à une droite vectorielle)

Démonstration : Soit A(x) une primitive de x→a(x), on définit la fonction g par $g(x) = f(x)e^{A(x)}$, fonction clairement dérivable sur I
On a : $g'(x) = f'(x)\,e^{A(x)} + A'(x)f(x)e^{A(x)} = f'(x)\,e^{A(x)} + a(x)f(x)e^{A(x)} = (f'(x)+a(x)f(x))e^{A(x)}$
Ainsi, f est solution de (E_0) si et seulement si g'(x) = 0 c'est-à-dire si g est constante sur I.

Ex : Résoudre sur ℝ, $y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$
On a donc : $y = \lambda e^{-\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx} = \lambda e^{-\arctan(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Proposition
Si f_0 est une solution non nulle de (E_0) alors elle ne s'annule pas sur I et
$S_0 = \{\alpha f_0 / \alpha \in K\}$

Démonstration, si f_0 est une solution de (E_0), alors $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \lambda_0 e^{-\int_0^x a(t)dt}$
Clairement si f_0 s'annule une fois, alors $\lambda_0 = 0$ et f_0 est la fonction nulle.
Si f est une solution ne s'annulant pas sur I, alors : $f(x) = \lambda e^{-\int_0^x a(t)dt}$, et f et f_0 sont proportionnelles.

Ex : Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ $y' + \frac{1}{x}y = 0$

On a directement : $y(x) = \lambda e^{-\int_1^x \frac{1}{t}dt} = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in K$

2) Solution « particulière »
Avec un certain type de second membre
a) Second membre de la forme x→P(x)$e^{\lambda x}$
On peut chercher une solution de même type que le second membre, c'est-à-dire de la forme x→Q(x)$e^{\lambda x}$ avec Q une fonction polynomiale.

Ex : Résoudre l'équation différentielle $y' + xy = x^2e^x$ sur ℝ

-On résout l'équation homogène associée : $y'+xy = 0$
Soit $\boldsymbol{y=\lambda e^{\frac{-1}{2}x^2}}$ **avec** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

-On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = P(x)e^x$ avec P polynôme réel.
On a y_0 solution de (E) ⇔ $P'(x)e^x + P(x)e^x + x\,P(x)e^x = x^2e^x$
D'où : $P'(x)+(1+x)P(x)=x^2$, P est de degré 1
On cherche P sous la forme P(x) = ax+b avec a et b deux réels.
Ainsi : $a+(1+x)(ax+b) = x^2 \Leftrightarrow a+ax+b+ax^2+bx = x^2 \Leftrightarrow (a-1)x^2+(a+b)x+(a+b) = 0$
Par identification : a=1, b=-1
P(x) = x-1, $\boldsymbol{y_0(x) = (x-1)e^x}$

Les solutions de (E) sont : y(x) = (x-1)$e^x + \lambda e^{\frac{-1}{2}x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Second membre avec des fonctions circulaires

Pour un second membre avec des cosinus et des sinus, on peut :

Première possibilité : On cherche une solution particulière de la forme : Acos+Bsin avec A et B réels

Deuxième possibilité : on bascule en complexe
On résout y'+y = e^{ix}

Et on conserve la partie réelle des solutions…

3) Superposition des solutions et méthode de la variation de la constante
On reprend les méthodes du précédent chapitre

Ex : Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ xy' + y = 1+(1+x)e^x

-On résout l'équation homogène associée : y' + $\frac{1}{x}$y = 0
Soit : **y(x) = $\lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$**

-On cherche une solution particulière de xy' + y = 1⇔ y' + $\frac{1}{x}$y = $\frac{1}{x}$
Une solution évidente, **$y_0 = 1$**

-On cherche une solution particulière de xy' + y = (1+x)e^x
On cherche y_1(x) = P(x) e^x avec P polynôme réel.
On a : x(P'(x) e^x + P(x) e^x)+ P(x) e^x = (1+x)e^x
Soit: xP'(x) e^x +(x+1) P(x) e^x = (1+x)e^x, xP'(x)+(x+1)P(x) = x+1
On constate que P est de degré 0, il s'agit d'une constante, P(x) = 1
Ainsi : **$y_1(x) = e^x$**

Finalement, les solutions de (E) sont : y(x) = e^x+1+$\frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

4) En résumé :
On résout d'abord (E_0) puis on détermine une solution particulière de (E), pour cette solution particulière, on peut chercher une solution « évidente » dont la forme est proche du second membre de l'équation, décomposer le second membre et utiliser le principe de superposition.
Mais on peut également utiliser le principe de la **variation de la constante…**

Ex : Résoudre sur]1 ;+∞[: y' + $\frac{1}{x}y = \frac{x}{x-1}$
-On résout l'équation homogène associée : y' + $\frac{1}{x}y = 0$
Elle a pour solution : **y(x) = $\lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$**

-On cherche une solution particulière de y' + $\frac{1}{x}y = \frac{x}{x-1}$

Cherchons cette solution sous la forme $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$ par variation de la constante.

On a : $\frac{\lambda' x-\lambda}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{x}{x-1}$, soit : $\frac{\lambda'}{x} = \frac{x}{x-1}$ ou $\lambda' = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$

Finalement : $\lambda = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1)$

Et $y_0(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1)}{x} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln(x-1)}{x}$

Les solutions de (E) sont : $y(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln(x-1)}{x} + \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

III. Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est une équation différentielle associée à une condition initiale.

1) Théorème de Cauchy

Pour toute condition initiale $(x_0 ; y_0) \in I \times K$, il existe une unique solution f de l'équation (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $f(x_0) = y_0$

Démonstration : y est donc de la forme : $y(x) = f_1(x) + \lambda f_0(x)$ avec f_1 une solution particulière de (E) et f_0 une solution non nulle de l'équation homogène associée.

Or $y(x_0) = f_1(x_0) + \lambda f_0(x_0)$ or f_0 ne s'annule pas sur I donc $\lambda = \frac{y(x0) - f1(x0)}{f0(x0)}$ et l'unicité par construction…

Ex : Déterminer l'unique solution sur $]0 ;\pi[$ de l'équation différentielle $y' + \frac{cosx}{sinx} y = 1$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$

-On résout l'équation homogène associée : $y' + \frac{cosx}{sinx} y = 0$.

Soit : $y(x) = \lambda e^{-\ln(|\sin(x)|)} = \frac{\lambda}{\sin(x)}$ **avec $\lambda \in \mathbb{R}$**

-On cherche une solution particulière sous la forme : $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{\sin(x)}$

Soit : $\frac{\lambda'(x)\sin(x) - \lambda(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{cosx}{sinx} \times \frac{\lambda(x)}{\sin(x)} = 1$

Et : $\frac{\lambda'(x)\sin(x)}{\sin^2(x)} = 1$ ou encore : $\lambda'(x) = \sin(x)$, ce qui donne : $\lambda(x) = -\cos(x)$

On a ainsi : $\mathbf{y_0(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}}$

Finalement les solutions de (E) sont : $y(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\lambda}{\sin(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$y(\frac{\pi}{2}) = \lambda$ donc $\lambda = 0$ et $y(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}$

2) Conséquences du théorème de Cauchy

Si f est une solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, alors f s'annule si et seulement si elle est identiquement nulle !

Les graphes de deux solutions d'une même équation différentielle linéaire d'ordre 1 sont donc disjoints ou confondus…

3) Une application importante : l'étude de parité d'une solution

Exercice : Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0, a et b des fonctions continues sur I et impaires, montrer que toute solution de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ est paire.