IE DL

samedi 11 avril 2026 21:24

Exo n°1

1) $f(x) = x\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$$\boxed{f(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)}$$

2) $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$\left(\ln(1+x)\right)\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

$$\boxed{\left(\ln(1+x)\right)\frac{\sin x}{x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}$$

Exo n°2

$DL_3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $\cos x$, on pose $x = \frac{\pi}{3} + h$ on a bien $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} h = 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cosh - \sin\frac{\pi}{3}\sinh = \frac{1}{2}\cosh - \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh.$

or $\cosh = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)$ et $\sinh = h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$

$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3)$

$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{h^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3)$

$$\boxed{\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)}$$

Exo n°3

1) Composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{dérivable sur } \mathbb{R}}$

2) $\boxed{k'(x) = \frac{1}{1 + e^{2x}}\, e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}}$

3) $\frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2 + 2x + 2x^2 + o(x^2)}$

$$\begin{array}{l|l} 1 + x + \frac{x^2}{2} & 2 + 2x + 2x^2 \\ \hline -(1 + x + x^2) & \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} \\ \quad -\frac{x^2}{2} & \end{array}$$

Donc $k'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}$

et $h(x) = h(0) + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$

or $h(0) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{h(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)}$$

4) $\boxed{y = \frac{\pi}{4} + x}$

5) $h(x) - \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \underset{0}{\sim} \frac{-1}{12}x^2 < 0$ donc localement C_f est sous la tangente à droite de 0 et au-dessus à gauche. On reconnait un point d'inflexion

Exo n°4

1) ϕ est linéaire et $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$ de plus $\deg\phi(P) \leq \deg P$

Donc $\boxed{\phi \text{ endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$

2) $\phi(1) = 1$

$\phi(X) = X - (4X+1) = -3X - 1$

$\phi(X^2) = X^2 - (4X+1)2X = -7X^2 - 2X$

$$\boxed{M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phi(1) & \phi(X) & \phi(X^2) \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}}$$

3) $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$\phi(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - b \\ -3b - 2a \\ -7a \end{pmatrix}$ donc $\phi(P) = \lambda P \iff \begin{cases} c - b = \lambda c \\ -3b - 2a = \lambda b \\ -7a = \lambda a \end{cases}$

D'où <u>1^er cas</u> : $a = 0$

alors $\begin{cases} c - b = \lambda c \\ -3b = \lambda b \end{cases}$

<u>1^er sous cas</u> : $b \neq 0$

Alors $\lambda = -3$

<u>2^e sous cas</u> : $b = 0$

$c = \lambda c$

<u>1^er sous cas</u> $c = 0$

<u>2^e sous cas</u> : $c \neq 0$

$\lambda = 1$

<u>2^e cas</u> : $a \neq 0$

Alors $\lambda = -7.$

<u>cl</u> : $\lambda = -3$, 1 ou -7.

Pour $\lambda = -3$, $\begin{cases} c - b = -3c \\ -3b - 2a = -3b \\ -7a = -3a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = \frac{b}{4} \end{cases}$ d'où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = 1$, $\begin{cases} c - b = c \\ -3b - 2a = b \\ -7a = a \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$ d'où $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = -7$, $\begin{cases} c - b = -7c \\ -3b - 2a = -7b \\ -7a = -7a \end{cases} \iff \begin{cases} 4b - 2a = 0 \\ 8c = b \end{cases} \iff \begin{cases} c = \frac{b}{8} \\ a = 2b \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$ d'où $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) Dans $B' = (P, Q, R)$ alors $\boxed{M_{B'}(\phi) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}}$