Feuille d'exercices sur probabilités

Les questions en italique font appel à la notion de variance et espérance.

Exercice n°1 (INP)

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces. L'expérience aléatoire consiste à lancer successivement deux dés équilibrés. On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé,
- E_1 l'événement « $D_1 < D_2$ », E_2 l'événement « $D_1 = D_2$ », E_1 l'événement « $D_1 > D_2$ »,
- pour tout $k \in [|2, 12|]$, F_k l'événement « $D_1 + D_2 = k$ »

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$.
3. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2, et E_3.
4. Rappeler la définition mathématique de deux événements incompatibles.
   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles F_k et E_2 sont incompatibles.
5. Rappeler la définition mathématique de deux événements indépendants.
   F_2 et E_2 sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice n°2

Soit une variable aléatoire X définie sur $\mathbb{N}$, et dont la loi de probabilité est donnée par :
$P(X=n)=\frac{\alpha}{3^n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Calculer α
2) *Calculer si c'est possible E(X). Calculer si c'est possible V(X)*

Exercice n°3

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1) Calculer p_1
2) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n
3) En déduire l'expression de p_n

Exercice n°4

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges avec $n \geq 2$. On effectue au hasard et sans remise n tirages successifs d'une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité que les n premières boules soient blanches ?

Exercice n°5

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, τ, P) telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

1) Déterminer les réels α, β, γ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}$
2) Déterminer alors le réel a tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$ définisse une loi de probabilité de X.
3) *X admet-elle alors une espérance ? une variance ? Si oui, les calculer…*

Exercice n°6

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation.

Si la place est réservée le jour k, elle le restera le jour k+1 avec la probabilité $\frac{9}{10}$

Si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour k+1 avec la probabilité $\frac{4}{10}$

On note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k

1) Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k
2) En déduire l'expression de r_k en fonction de k.

Exercice n°7

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ? (On introduira A_n= {les n-1 premiers lancers donnent 2 ou 4 et le dernier donne 6}, puis on calculera P($\cup$ A_n))

Exercice n°8 (oral Edhec)

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire.
On considère les événements suivants :

× A : « on effectue un nombre fini de tirages »,

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : « le jeu s'arrête au $n^{\text{ème}}$ tirage »,

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n : « on tire une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage ».

a. Démontrer que les événements F_n sont deux à deux incompatibles.

b. Exprimer l'événement F_n en fonction des événements B_i ($i \in [\![1, n]\!]$).

c. Exprimer A en fonction des événements F_n et déterminer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice n°9 (Edhec)

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
On tire successivement des boules dans cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule supplémentaire de la même couleur.
On note A_n l'événement : « la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche ».

a. Exprimer en fonction des événements A_n l'événement A : « toutes les boules tirées sont blanches ».

b. Déterminer $\mathbb{P}(A)$.

c. Montrer que la boule rouge initiale sera tirée, de manière presque sûre, au cours de l'expérience.

Exercice n°10

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité 1−p, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note pn la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1) Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2) En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3) En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous?

Exercice n°11

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la Santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test? (ind. P(M /T))

Exercice n°12

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité p = 1/ 3 . Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit toujours pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture ?
3. Combien faut-il de relectures pour que cette dernière probabilité soit supérieure à 0, 9 ?

Exercice n°13

1) Soient A et B deux événements de probabilités non nulles, démontrer que $P_B(A) = \frac{P(A)-P_{\bar{B}}(A)P(\bar{B})}{P(B)}$
2) Un objet peut avoir un défaut « a » avec une probabilité 0,2 et un défaut « b » avec une probabilité 0,3.
   S'il n'a pas le défaut « b » la probabilité qu'il ait le défaut « a » est 0,1
   On note A : « Avoir le défaut a » et B : « Avoir le défaut b »
   a) Calculer $P_B(A)$
   b) A et B sont-ils indépendants ?
   c) Calculer la probabilité d'avoir l'un des deux défauts au moins.

Exercice n°14

Trois urnes contiennent respectivement deux boules rouges et une boule verte, deux boules vertes et une boule noire, deux boules noires et une boule rouge. On tire au hasard une boule dans la première urne et on la met dans la deuxième urne, puis on tire une boule dans la deuxième urne et on la met dans la troisième urne, enfin in tire une boule dans la troisième urne.

1) Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit verte.
2) Calculer la probabilité que la dernière boule tirée soit noire.
3) Calculer la probabilité de tirer 3 boules de la même couleur.

Exercice n°15 (ECS)

Exercice 10 (Type DS)**.** On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A_1, A_2 et A_3. On suppose qu'initialement le mobile se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en A_i,

— il passe en A_j ($j \neq i$) avec la probabilité $\frac{2}{5}$ dans les deux cas.

— il reste en A_i avec la probabilité $\frac{1}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements : U_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_1" ; V_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_2" ; W_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_3". On pose $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$.

1. Déterminer u_0, v_0 et w_0.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.
6. Quelles sont les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?