Chapitre 8 : Algèbre générale

I. Relation dans un ensemble

1) Définition

Une **relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E** est une propriété pour certains couples (x ;y) de E^2 et fausse pour d'autres.
Lorsque le couple (x ;y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, on note $x\,\mathcal{R}y$

Exemples
La relation $\leq sur\ \mathbb{R}$
La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$, $m\ \mathcal{R}\ n \Leftrightarrow m$ divise n

2) Autres définitions :

Une relation $\mathcal{R}$ est dite **« réflexive »** si pour tout x de E, $x\,\mathcal{R}x$
Une relation $\mathcal{R}$ est dite **« symétrique »**, si pour tout x,y de E, $x\,\mathcal{R}y \Longrightarrow y\,\mathcal{R}x$
Une relation $\mathcal{R}$ est dite « **transitive** » si pour tout x,y,z de E, $x\,\mathcal{R}y$ et $y\,\mathcal{R}z \Longrightarrow x\,\mathcal{R}z$
Une relation $\mathcal{R}$ est dite « **antisymétrique** » si pour tout x,y de E, $x\,\mathcal{R}y$ et $y\,\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$

Remarque : L'antisymétrie n'est pas l'inverse de la symétrie !

3) Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence sur un ensemble E**, toute relation réflexive, symétrique et transitive.

4) Classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$, une relation d'équivalence sur un ensemble E, et $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence, notée cl(x)**, le sous-ensemble de E constitué des éléments en relation avec x.
Ainsi : $cl(x) = \{y \in E / y\ \mathcal{R}\ x\}$

Remarque n°1 :
Soit $(x,y) \in E^2$, muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$
Alors soit $y \in cl(x)$ et $cl(x) = cl(y)$, soit x n'est pas en relation avec y et $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$

Ex : On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation de congruence : les entiers x et y sont congrus modulo n (entier non nul) si leur différence est un multiple de n :
$x\,\mathcal{R}y$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z} / x = y + kn$
Dans ce cas on note : $x \equiv y\ [n]$
Ainsi $19 \equiv 4 [5]$ mais aussi $19 \equiv 9 [5]$ et une infinité d'autres possibilités !

Remarque n°2 :
L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle **l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, et se note $E/\mathcal{R}$**

II. Relation d'un ensemble vers un autre ensemble

1) Définition

Une application f est définie par :
-un ensemble de départ ou de définition E

-un ensemble d'arrivée F
-la donnée pour tout x de E, d'un unique élément de F noté f(x) appelé image de x par f
On parle d'application (ou de fonction) de E dans F
On note : f : E→F, x→f(x)

2) Notation
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E

3) Définitions :
Soit E un ensemble et I un ensemble fini, on appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i\in I}$

Soit E un ensemble et A une partie de E, on appelle indicatrice de A et note 1_A la fonction de E dans {0 ;1} définie par : $1_A(x)=\begin{cases} 1 \; si \; x \in A \\ 0 \; si \; x \notin A \end{cases}$

4) Composée
Soient E,F et G, 3 ensembles, f une application de E dans F et g de F dans G, on appelle composée de f par g, notée gof, l'application de E dans G, l'application gof : E→G, x →g(f(x))

5) Définitions
a) Identité
Soit E un ensemble, on appelle application identité de E, notée Id_E, l'application qui à tout élément x de E associe x

b) Restriction
Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E.
On appelle restriction de f à A et on note $f_{/A}$: A→F, x→ $f(x)$

III. Image directe, réciproque

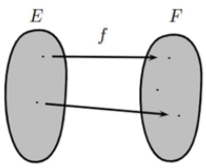
1) Définitions (Rappels)
Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, A une partie de E. On appelle image directe de A par f , et on note f(A), le sous-ensemble de F défini par $f(A) = \{f(x)/x\in A\} = \{y\in F / \exists x \in A, y = f(x)\}$

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f , et on note $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble de E défini par : $f^{-1}(B) = \{x\in E, f(x) \in B\}$

Remarque : A retenir : $y\in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$
$x\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

2) Applications injectives, surjectives, bijectives (Rappels)
a) Application injective
Soit f une application de E dans F, on dit que f est **une application injective ou une injection** lorsque tout élément de F possède au plus un antécédent par f, c'est-à-dire : $\forall(x,x') \in E^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$

Remarque : De façon équivalente f est injective si et seulement si $\forall(x, x') \in E^2, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$

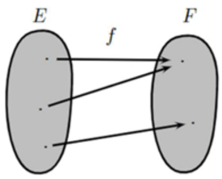


f est injective

Théorème : La composée de deux applications injectives est injective

Démonstration : Soient f et g deux applications définies respectivement sur I et J tels que f(I)⊂J
Si gof(x) = gof(x') alors par injectivité de g, on a f(x) = f(x') puis x=x' par injectivité de f

b) Application surjective
Soit f une application de E dans F, on dit que f est une **application surjective ou une surjection** lorsque tout élément de F possède au moins un antécédent par f, c'est-à-dire : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$



f est surjective

Théorème : La composée de deux applications surjectives est surjective

Démonstration : Soient f et g deux applications définies respectivement sur I et J tels que f(I)⊂J,
Soit y∈g(J), alors il existe un antécédent x de J, tel que : y = g(x) mais f est surjective, donc il existe un antécédent x' de I tel que x=f(x')
D'où y = gof(x')

c) Application bijective
Soit f une application de E dans F, on dit que f est **une application bijective ou une bijection** lorsque f est à la fois injective et surjective, une autre façon de le dire : tout élément de F possède un unique antécédent par f, c'est-à-dire : $\forall y \in F, \exists!\, x \in E, y = f(x)$

d) Application réciproque
Soit f une bijection de E dans F, on appelle **application réciproque ou bijection réciproque**, de f notée f^{-1} l'application de F dans E qui à tout élément y de F associe son unique antécédent x de E
Ainsi : $\forall(x; y) \in E \times F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Proposition : Soit f une bijection de E dans F et f^{-1} son application réciproque, alors : $fof^{-1} = Id_F$ et $f^{-1}of = Id_E$

Théorème : Une application f de E dans F est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E vérifiant : $fog = Id_F$ et $gof = Id_E$
On a alors : $g = f^{-1}$

Démonstration :
Soit $x\in E$, posons $f(x) = y$, alors $gof(x) = g(y)$, et $x=g(y)$
Ainsi de $x=g(y)$, on a $f(x) = fog(y)$ mais $fog(y) = y$ car $fog = Id$
Et y admet g(y) comme unique antécédent par f

Théorème : Soit f une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G alors gof est bijective de E dans G et on a : $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

Démonstration : On utilise l'associativité de la composition !
Ainsi $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = (f^{-1}o(g^{-1}og)of) = f^{-1}of = Id_E$ et on conclut avec la propriété précédente…

3) Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinalité
On suppose ici que E et F sont des ensembles finis.
Si $f:E\to F$ injective alors $card(F)\geq card(E)$
Si $f:E\to F$ surjective alors $card(F)\leq card(E)$
Si $f:E\to F$ bijective alors $card(F)=card(E)$

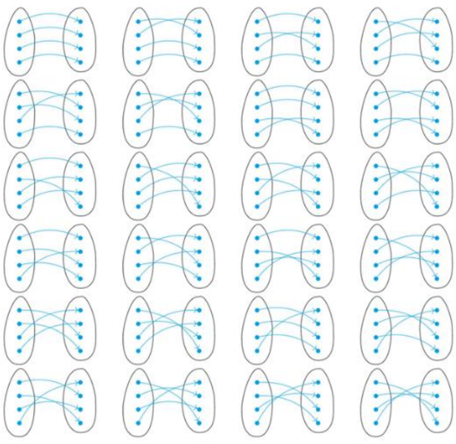
Théorème : Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $f:E\to F$ une application, alors f bijective$\Leftrightarrow$f injective$\Leftrightarrow$f surjective.

Démonstration :
On suppose f bijective alors de façon évidente f est injective.

On suppose f injective
Comme $f:E\to f(E)$ est bijective, on a $card(E) = car(f(E))$
Si f n'est pas surjective alors $card(F)>car(f(E))$, et $card(E)>card(f(E))$ absurde

On suppose f surjective
On a donc $f(E) = F$, et $card(f(E)) = card(F) = card(E)$
Si f n'est pas injective alors $card(F)<card(E)$ absurde.

Par pur amusement…



Les 24 bijections existantes entre deux ensembles de cardinal 4.