Chapitre 1 : Logique

M. Calciano

I. Généralités

1) Assertions

Définition. Une **assertion** est une phrase mathématique qui est soit *vraie*, soit *fausse*.

Exemple. « 3 est un nombre impair » est une assertion vraie ; « 2 est impair » est une assertion fausse.

> Par convention, si P est une assertion, on écrit « Supposons P » plutôt que « Supposons que P soit vraie ».

2) Connecteurs logiques

Soient P et Q deux assertions :

— **Négation** (NON P) : vraie si et seulement si P est fausse.
— **Conjonction** (P ET Q) : vraie si et seulement si P et Q sont toutes deux vraies.
— **Disjonction** (P OU Q) : vraie si et seulement si au moins l'une des deux est vraie.
— **Implication** ($P \Rightarrow Q$) : fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse.
— **Équivalence** ($P \Leftrightarrow Q$) : vraie si et seulement si P et Q ont la même valeur de vérité.

Table de vérité (convention : 1 = vrai, 0 = faux) :

P	Q	P ET Q	P OU Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	NON P
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Exemple. L'assertion « $3 = 4 \Rightarrow 8 = 2$ » est *vraie* car son hypothèse $(3 = 4)$ est fausse : une implication à hypothèse fausse est toujours vraie.

3) Propriétés fondamentales

Soient P, Q, R trois assertions :

— P ET (NON P) est toujours fausse **(non-contradiction)**.
— P OU (NON P) est toujours vraie **(tiers exclu)**.
— NON (NON P) $\Leftrightarrow P$ **(double négation)**.
— NON (P OU Q) $\Leftrightarrow$ (NON P) ET (NON Q) **(loi de De Morgan)**.
— NON (P ET Q) $\Leftrightarrow$ (NON P) OU (NON Q) **(loi de De Morgan)**.
— P OU (Q OU R) $\Leftrightarrow$ (P OU Q) OU R **(associativité)**.

Exercice n°1

Montrer à l'aide d'une table de vérité que :

a) [NON (P ET Q)] $\Leftrightarrow$ [(NON P) OU (NON Q)]
b) [(P ET Q) ET R] $\Leftrightarrow$ [P ET (Q ET R)]

4) Propriétés de l'implication et de l'équivalence

- $P \Rightarrow Q \;\Leftrightarrow\;$ (NON P) OU Q
- $P \Leftrightarrow Q \;\Leftrightarrow\;$ ($P \Rightarrow Q$) ET ($Q \Rightarrow P$)
- **Transitivité :** Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, alors $P \Rightarrow R$.
- **Négation d'une implication :** NON ($P \Rightarrow Q$) $\Leftrightarrow$ P ET (NON Q). *(la négation d'une implication n'est pas une implication)*

Démonstration. *Montrons que $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow$ (NON P) OU Q par table de vérité :*

P	Q	$P \Rightarrow Q$	NON P	(NON P) OU Q
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Les colonnes 3 et 5 sont identiques, d'où l'équivalence. □

5) Remarques sur l'implication

- **Ne jamais confondre $\Rightarrow$ et « donc ».** « Il pleut $\Rightarrow$ le sol est mouillé » est une proposition mathématique vraie même s'il ne pleut pas en ce moment ; en revanche, « il pleut *donc* le sol est mouillé » affirme qu'il pleut effectivement.
- $P \Rightarrow Q$ se lit aussi : « P est une condition *suffisante* pour Q » ou « Q est une condition *nécessaire* pour P ».
- $P \Leftrightarrow Q$ se lit : « P si et seulement si Q ».

II. Modes de raisonnement

1) Raisonnement déductif et transitivité

Si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie. On peut enchaîner : « P [est vraie]. Or $P \Rightarrow Q$. Donc Q [est vraie] car… »

2) Raisonnement par contraposée

Contraposée de $P \Rightarrow Q$: l'assertion (NON Q) $\Rightarrow$ (NON P).
Une implication et sa contraposée sont *logiquement équivalentes.*

Démonstration. *Table de vérité : les colonnes de $P \Rightarrow Q$ et (NON Q) $\Rightarrow$ (NON P) sont identiques (vérification laissée en exercice).* □

Exemple. Montrons que si $n \in \mathbb{Z}$ vérifie n^2 pair, alors n est pair.
Contraposée : montrons que si n est impair, alors n^2 est impair. *Preuve :* si n est impair, $\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k+1$, donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair. □

3) Raisonnement par double implication

Pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$, on montre $P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$.

Exemple. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que n^2 est impair si et seulement si n est impair.*

- ($\Rightarrow$) Par contraposée : si n est pair, $n = 2k$, donc $n^2 = 4k^2$ est pair.
- ($\Leftarrow$) Si n est impair, $n = 2k+1$, donc $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

4) Raisonnement par disjonction de cas

Lorsqu'une propriété $P(x)$ dépend d'un paramètre, il peut être utile de distinguer des sous-cas couvrant toutes les situations possibles (par exemple : $x \geq 0$ ou $x < 0$).

Exemple. Montrons que $n(n+1)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{Z}$. *Cas 1 :* n est pair, alors $n(n+1)$ est pair. *Cas 2 :* n est impair, alors $n+1$ est pair, donc $n(n+1)$ est pair. □

5) Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une assertion P est vraie, on suppose NON P et on aboutit à une **contradiction**.

Exemple. *Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Démonstration. *Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$ et $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair. Posons $p = 2p'$ ($p' \in \mathbb{Z}$) : $4p'^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2p'^2$, donc q^2 est pair, donc q est pair. Ainsi p et q sont tous deux pairs, ce qui contredit $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$.* $\square$

6) Raisonnement par analyse-synthèse

- **Analyse :** on suppose que l'objet cherché existe et on en déduit des propriétés nécessaires (liste de candidats).
- **Synthèse :** on vérifie que chaque candidat est effectivement solution.
- **Conclusion :** on énonce l'ensemble des solutions.

Exemple. Trouver les réels x tels que $1 + x \geq 0$ et $1 - x^2 = \sqrt{1 + x}$.

Analyse. Si $1 - x^2 = \sqrt{1 + x}$, alors en élevant au carré : $(1 - x^2)^2 = 1 + x$, soit $x^4 - 2x^2 - x = 0$, c'est-à-dire $x(x^3 - 2x - 1) = 0$. Comme -1 est racine évidente de $x^3 - 2x - 1$, on factorise : $x^3 - 2x - 1 = (x + 1)(x^2 - x - 1)$. Les racines de $x^2 - x - 1 = 0$ sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Candidats : 0, -1, $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Synthèse. $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$: alors $1 - x^2 < 0$ donc ce n'est pas une solution. On vérifie que 0, -1 et $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ conviennent.

Conclusion. Les solutions sont $\left\{-1,\ 0,\ \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.

III. Les quantificateurs

1) Définitions

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E.

- $\forall x \in E,\ P(x)$: vraie si $P(x)$ est vraie pour *tout* $x \in E$.
- $\exists x \in E,\ P(x)$: vraie s'il existe *au moins un* $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.
- $\exists!\, x \in E,\ P(x)$: vraie s'il existe *exactement un* $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.

Exemple. $\exists n \in \mathbb{Z},\ n + 1 = 0$ est **vraie** (prendre $n = -1$) ; $\forall n \in \mathbb{Z},\ n + 1 = 0$ est **fausse**.

2) Négations des quantificateurs

- NON $[\forall x \in E,\ P(x)] \ \Leftrightarrow\ \exists x \in E,$ NON $P(x)$
- NON $[\exists x \in E,\ P(x)] \ \Leftrightarrow\ \forall x \in E,$ NON $P(x)$

Exemple. La négation de « toute fonction continue est dérivable » est : « il existe une fonction continue qui n'est pas dérivable » (et cette assertion est vraie : $x \mapsto |x|$).

Exercice n°2

Écrire la négation des assertions suivantes (en simplifiant NON $(A \Rightarrow B)$ et NON $(A \Leftrightarrow B)$) :

a) $\forall x \in E,\ A(x) \Rightarrow B(x)$

b) $\forall x \in E,\ A(x) \Leftrightarrow B(x)$

Solutions :

a) $\exists x \in E,\ A(x)$ ET NON $B(x)$

b) $\exists x \in E,\ [A(x)$ ET NON $B(x)]$ OU [NON $A(x)$ ET $B(x)]$

3) Succession de quantificateurs

L'ordre des quantificateurs **n'est pas interchangeable** en général ($\forall$ puis $\exists \neq \exists$ puis $\forall$).
En revanche, deux quantificateurs de même nature peuvent être permutés : $\forall x \forall y$ et $\forall y \forall x$ sont équivalents ; de même pour $\exists$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

— $A : \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(a)$ signifie que f admet un minimum global (en a).

— $B : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(a)$ est toujours vraie (prendre $a = x$ si f est non bornée supérieurement, par exemple) : cette assertion est bien moins forte que A.

IV. Le raisonnement par récurrence

1) Récurrence simple

Théorème (principe de récurrence). Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Plus généralement, si $P(n_0)$ est vraie et si $\forall n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration. *Raisonnons par l'absurde : supposons que P ne soit pas vraie sur tout $\mathbb{N}$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)$ est fausse$\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet donc un plus petit élément n_0 (propriété de bon ordre de $\mathbb{N}$, admise). Comme $P(0)$ est vraie, $0 \notin A$, donc $n_0 \geq 1$. Ainsi $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin A$, donc $P(n_0 - 1)$ est vraie. Par l'hérédité, $P(n_0)$ est vraie : contradiction avec $n_0 \in A$.* $\square$

Erreurs à éviter lors de la rédaction d'une récurrence :

1) **Ne pas écrire dans l'hypothèse de récurrence :**

« *Supposons pour tout $n \geq n_0$ que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie* »

En effet, si on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n, il n'y a plus rien à démontrer.

2) **Ne pas oublier la vérification au rang initial n_0.**
Le sens de $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est : « Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également ». Cela n'indique pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi, une famille de propositions peut être héréditaire pour tout n sans qu'aucune des $\mathcal{P}(n)$ ne soit vraie, d'où l'importance de la vérification au premier rang.

Exemple. On définit la suite u par $u_0 \in]0; +\infty[$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{u_n + 1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n = 2$ ».

La propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $u_n = 2$, alors $u_{n+1} = \dfrac{2+4}{2+1} = 2$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Cependant, si $\mathcal{P}(0)$ est fausse (ce qui est généralement le cas puisque u_0 est quelconque dans $]0; +\infty[$), alors $\mathcal{P}(n)$ sera fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Pour $n = 0$: les deux membres valent 0.

Hérédité. Supposons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Conclusion. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2) Récurrence forte

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et si $\forall n \geq 1$, $[P(0) \text{ ET } \cdots \text{ ET } P(n-1)] \Rightarrow P(n)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. *On pose H_n : « $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$ est vraie ». On vérifie que (H_n) satisfait les hypothèses de la récurrence simple.* □

Exemple. Tout entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers (voir exercice n°8).

Exercice n°3

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$.

1) Exprimer $u_{n+1} - u_{n-1}$ en fonction de u_n.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier pair.

V. Les ensembles

1) Définitions de base

— Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**.
— $x \in E$ signifie que x appartient à E ; $x \notin E$ signifie le contraire.
— L'**ensemble vide** $\emptyset$ ne contient aucun élément.
— Si E est fini, $\mathrm{Card}(E)$ désigne son nombre d'éléments.

2) Notation des ensembles

— **En extension :** $A = \{x, y, z\}$; $\{a\}$ est un *singleton* ; $\{a, b\} = \{b, a\}$.
— **En compréhension :** $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 = 0\}$.

3) Inclusion et égalité

— $A \subset B$ (A est inclus dans B) si tout élément de A appartient à B.
— $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.
— $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemple. Pour $E = \{a, b, c\}$: $\mathcal{P}(E) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 8 = 2^3$.

Propriété. Si $\mathrm{Card}(E) = n$, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

4) Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

— **Réunion :** $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ OU } x \in B\}$
— **Intersection :** $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ET } x \in B\}$
— **Complémentaire :** $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$
— **Différence :** $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ET } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

5) Propriétés algébriques

Soient A, B, C trois parties de E.
— **Distributivité :** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
— **Distributivité :** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
— **Lois de De Morgan :** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration. *(Lois de De Morgan, première loi.) Soit $x \in E$. $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow$ NON $(x \in A$ OU $x \in B) \Leftrightarrow x \notin A$ ET $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.* □

6) Partition

Une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ de parties de E est une **partition** de E si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E.$$

Exemple. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\{A, \overline{A}\}$ est une partition de E.

7) Cardinalité

Soient A, B parties d'un ensemble fini E.

— Si A et B sont disjoints : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

— **Formule d'inclusion-exclusion :** $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

— $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$.

— $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

8) Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Plus généralement, $E_1 \times \cdots \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$. On note $E^p = E \times \cdots \times E$ (p fois).

Exemple. $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$, de cardinal $2 \times 3 = 6$.

En général $E \times F \neq F \times E$ (si $E \neq F$).

VI. Exercices du chapitre

Exercice n°1

Soient P et Q deux assertions, montrer à l'aide d'une table de vérité que :

a) $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(\text{NON } Q) \Rightarrow (\text{NON } P)]$

b) $[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(\text{NON } P) \Leftrightarrow (\text{NON } Q)]$

c) $[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P)]$

Exercice n°2

Soit a, b, c, d quatre réels avec $a \neq b$. Montrer qu'il existe une unique fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$.

Exercice n°3

Soient a et b deux réels non nuls simultanément, et $f : x \mapsto ax^2 + b$. Montrer que si f s'annule, alors $ab \leq 0$.

Exercice n°4

Soit n un entier relatif. Montrer que $\dfrac{n^2 + n}{2}$ est un entier.

Exercice n°5

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut se décomposer de manière *unique* comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice n°6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). On considère la proposition : $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

1) Écrire la réciproque de cette implication.
2) Écrire la négation de cette proposition.
3) Écrire la contraposée de l'implication intérieure.
4) Écrire la contraposée de la réciproque.

Exercice n°7

Pour $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier) :

1) $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x \leq y$
2) $\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ x \leq y$
3) $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x < y$
4) $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x \leq y$

Exercice n°8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Écrire une assertion exprimant que f est majorée par $M \in \mathbb{R}$.
2) Écrire une assertion exprimant que f est majorée.
3) Écrire une assertion exprimant que f n'est pas majorée.

Exercice n°9

Montrer que tout entier naturel $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers.
Indication : procéder par récurrence forte.

Exercice n°10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Traduire en français :

1) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2) $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
3) $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice n°11

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x + 1| = 4 - |3x - 2|$.

Exercice n°12

Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
Indication : raisonnement par l'absurde, inspiré d'Euclide.

Exercice n°13

Soit E un ensemble et F un deuxième ensemble. Montrer que : $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Exercice n°14

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice n°15

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m + n) = f(m) + f(n)$.

Exercice n°16

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

Exercice n°17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence :

1) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice n°18

1) Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.
2) Pourquoi parle-t-on ici d'une *récurrence double* ? S'agit-il d'une récurrence forte ?

Exercice n°19

Soient E et F deux ensembles. Montrer que :

1) $F \subset E \Leftrightarrow E \cap F = F$
2) $F \subset E \Leftrightarrow E \cup F = E$

Exercice n°20

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Démontrer :

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3) Lois de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Exercice n°21

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit la différence symétrique par $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice n°22

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2}$ pour $n \geq 0$.

1) Montrer que u_n est bien défini (i.e. $u_n + 2 \neq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique ; préciser son premier terme et sa raison.
3) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis de n. En déduire le comportement de (u_n) lorsque $n \to +\infty$.