Khal de mathématiques ***(2025/2026)***

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout objet connecté est interdit.

La qualité de la rédaction fera partie intégrante de la notation. ***Merci d'encadrer les résultats. Durée 3H***

Exercice n°0 : *Prendre 5 minutes pour lire l'ensemble du sujet en diagonale et décider dans quel ordre traiter les exercices !*

Exercice n°1 (sur 2 points)

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de : $t \to (1+t)^{\frac{-1}{2}}$
2) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $t \to \frac{1}{ch(t)}$

Exercice n°2 (sur 3 points)

Une boîte A contient uniquement deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient uniquement deux jetons portant le numéro 1.

On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence l'opération n fois.

On s'intéresse à la somme des jetons dans l'urne A au bout des n tirages.

On introduit les événements

P_n : « La somme des jetons de l'urne A au bout des n tirages vaut 0 »,

Q_n : « La somme des jetons de l'urne A au bout des n tirages vaut 1 »,

R_n : « La somme des jetons de l'urne A au bout des n tirages vaut 2 »

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives.

1) Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1 et r_1
2) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n
3) Montrer que $q_{n+2}=\frac{1}{2}\, q_{n+1} + \frac{1}{2}\, q_n$
4) En déduire l'expression de q_n en fonction de n

<u>Exercice n°2</u> (sur 4 points)

Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit u$\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, l'endomorphisme associé canoniquement à A

1) Déterminer une base de Ker(u-id)
2) Déterminer une base de Ker(u-2id)
3) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\mathrm{u} - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{u} - 2\mathrm{id})$?
4) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle M(u)= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
5) On note B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices P et P^{-1} telles que A=PBP^{-1}
6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \mathrm{P}B^nP^{-1}$
7) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n
   b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n

<u>Exercice n°3</u> (sur 4 points)

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2.

On note B la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$

On considère l'application f définie sur E, par : f(P)(x) = $2x$P(x) – (x^2-1)P'(x)

1) Montrer que f est une application linéaire
2) En écrivant P sous la forme P(x)=a+bx +cx^2, définir explicitement f(P(x)), puis en déduire que f est un endomorphisme de E
3) Ecrire f(e_0), f(e_1) et f(e_2) comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 *et* e_2
4) En déduire la matrice A de f dans B
5) Vérifier que Im(f) = vect($e_1, e_0 + e_2$)

<u>Exercice n°4</u> (sur 2 points)

Soit l'équation différentielle suivante, où a et b désignent deux fonctions continues sur un intervalle I, y'+a(x)y+b(x)y^2=0 (E)

1) Montrer que si y est solution de (E) qui ne s'annule pas alors, z=$\frac{1}{y}$ est solution d'une équation linéaire (E') à préciser.
2) Déterminer les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ de y'+y-xy^2=0

<u>Problème</u> (sur 5 points)

On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$

1) Dresser le tableau de variations de f : $x \to \frac{\ln(x)}{x}$

2) En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 4 :
$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x} dx$

3) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 4, on ait :
$\frac{ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{ln^2(n)}{2} - C$
4) En déduire la limite de S_n
5) a) Montrer que $ln^2(n+1) \sim_{n\to+\infty} ln^2(n)$
b) En déduire un équivalent de S_n