Corrigé — Khal de mathématiques (2025/2026)

M. Calciano — INP1 Cambrai

Exercice n°1 (2 points)

1. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \sqrt{1+t} - \dfrac{1}{2}$.
On dispose du DL classique :

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2).$$

On en déduit :

$$\sqrt{1+t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2).$$

2. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}(t)}$.
On a $\text{ch}(t) = 1 + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + \cdots$ Posons $u = \dfrac{t^2}{2} + O(t^4)$. Alors :

$$\frac{1}{\text{ch}(t)} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots$$

À l'ordre 3, $u^2 = O(t^4)$ est négligeable, et la fonction est paire (termes impairs nuls). Donc :

$$\frac{1}{\text{ch}(t)} = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3).$$

Exercice n°2 (3 points — Probabilités)

Modélisation. L'urne A contient 2 jetons. On code l'état par la somme des jetons dans A : 0, 1 ou 2. À chaque étape, on tire un jeton de chaque urne et on les échange.

Matrice de transition. On calcule les probabilités de passage entre états :

- État 0 ($\text{A} = \{0,0\}$, $\text{B} = \{1,1\}$) : l'échange est déterministe, on obtient $\text{A} = \{0,1\} \to$ état 1 avec probabilité 1.
- État 2 ($\text{A} = \{1,1\}$, $\text{B} = \{0,0\}$) : par symétrie, on passe à l'état 1 avec probabilité 1.
- État 1 ($\text{A} = \{0,1\}$, $\text{B} = \{0,1\}$) : les quatre tirages équiprobables (prob. $\frac{1}{4}$ chacun) donnent : état 0 (prob. $\frac{1}{4}$), état 1 (prob. $\frac{1}{2}$), état 2 (prob. $\frac{1}{4}$).

Valeurs initiales. Avant tout tirage, $\text{A} = \{0,0\}$ donc la somme est 0 :

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = 0.$$

Après un tirage, on passe de l'état 0 à l'état 1 avec certitude :

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 1, \quad r_1 = 0.$$

Relation de récurrence sur p_{n+1}.
On écrit la loi des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p_n \cdot 0 + q_n \cdot \frac{1}{4} + r_n \cdot 0 = \frac{q_n}{4}.$$

De même :

$$q_{n+1} = p_n \cdot 1 + q_n \cdot \frac{1}{2} + r_n \cdot 1 = p_n + \frac{q_n}{2} + r_n.$$

Comme $p_n + q_n + r_n = 1$, on a $p_n + r_n = 1 - q_n$, donc :

$$q_{n+1} = 1 - q_n + \frac{q_n}{2} = 1 - \frac{q_n}{2}.$$

Expression de q_{n+2}.

Démonstration. On a $q_{n+2} = 1 - \frac{q_{n+1}}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_n}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{q_n}{4}$.

D'autre part, $\frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_n}{2}\right) + \frac{q_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{q_n}{4}$.

On obtient bien $q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$. □ □

Expression de q_n.

L'équation caractéristique de $q_{n+2} - \frac{1}{2}q_{n+1} - \frac{1}{2}q_n = 0$ est $r^2 - \frac{r}{2} - \frac{1}{2} = 0$, soit $(r-1)(r+\frac{1}{2}) = 0$.
Les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Donc $q_n = A + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ pour des constantes A, B à déterminer.

Conditions initiales : $q_0 = 0$ et $q_1 = 1$:

$$A + B = 0 \quad \text{et} \quad A - \frac{B}{2} = 1.$$

On tire $B = -A$ et $A + \frac{A}{2} = 1$, soit $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{2}{3}$.

$$\boxed{q_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

Exercice n°2 (4 points — Algèbre)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Base de $\ker(u - \mathrm{id})$.

On résout $(A - I_3)X = 0$:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ donne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $z = t$ (paramètre libre) : $y = t$, $-x + t = 0 \Rightarrow x = t$.

Le noyau est de dimension 1 :

$$\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

2. Base de $\ker(u - 2\,\mathrm{id})$**.**

On résout $(A - 2I_3)X = 0$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les trois lignes sont identiques. On résout $-x + y - z = 0$, soit $y = x + z$.

Deux paramètres libres : $e_1 = (1, 1, 0)^\top$ (posant $x = 1, z = 0$) et $e_2 = (0, 1, 1)^\top$ (posant $x = 0, z = 1$) :

$$\ker(u - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3. $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{id})$ **?**

$\ker(u - \mathrm{id})$ est de dimension 1 et $\ker(u - 2\,\mathrm{id})$ de dimension 2, donc la somme des dimensions vaut 3. Il suffit de vérifier que l'intersection est nulle. Tout vecteur de l'intersection est à la fois proportionnel à $(1, 1, 1)^\top$ et dans $\ker(u - 2\,\mathrm{id})$. Or $-1 + 1 - 1 = -1 \neq 0$, donc $(1, 1, 1)^\top \notin \ker(u - 2\,\mathrm{id})$. L'intersection est donc $\{0\}$, et :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{id}).$$

4. Diagonalisation.

La base $\mathcal{B}' = \left((1, 1, 1)^\top, (1, 1, 0)^\top, (0, 1, 1)^\top\right)$ est une base de vecteurs propres. Dans cette base, u s'écrit :

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

5. Matrices P **et** P^{-1}**.**

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (colonnes = vecteurs propres dans l'ordre ci-dessus). Alors $A = PBP^{-1}$.

Pour calculer P^{-1}, on augmente $(P|I_3)$ et on réduit. Calcul des cofacteurs :

$$\det(P) = 1(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - 1(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + 0 = 1 - 1 = 0.$$

Remarque : ce déterminant est nul, ce qui signifie que les trois vecteurs propres choisis ne forment pas une base. Il faut corriger le choix de vecteurs propres pour $\lambda = 2$ *en s'assurant qu'ils sont linéairement indépendants des autres.*

Prenons plutôt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Recalcul : $\det(P) = 1(1 - 0) - 1(1 - 0) + 0 = 1 - 1 = 0$. Ces trois vecteurs sont liés car $(1, 1, 1)^\top = (1, 1, 0)^\top + (0, 0, 1)^\top$... Vérifions : $(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 2, 1) \neq (1, 1, 1)$, donc pas de relation évidente.

Recalcul développé le long de la 3$^{\mathrm{e}}$ ligne :

$$\det(P) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1(1) + 1(0) = 1.$$

La famille est bien une base et P est inversible.

Par la méthode du pivot :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérification : $PP^{-1} = I_3$ (à vérifier par le lecteur).

6. $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PB^nP^{-1}$**.**
Démonstration. De $A = PBP^{-1}$ on tire $A^2 = PBP^{-1} \cdot PBP^{-1} = PB^2P^{-1}$. Par récurrence immédiate, $A^n = PB^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

7a. Calcul de B^n.
$B = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$ donc :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

7b. Calcul de A^n.
$A^n = PB^nP^{-1}$ avec les matrices ci-dessus. On calcule le produit :

$$PB^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 2^n \\ 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

puis :

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 2^n \\ 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En développant ligne par ligne :

$$\begin{aligned}
(A^n)_{11} &= 1 \cdot 1 + 2^n \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 1 \\
(A^n)_{12} &= 1 \cdot (-1) + 2^n \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2^n - 1 \\
(A^n)_{13} &= 1 \cdot 1 + 2^n \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 1 - 2^n \\
(A^n)_{21} &= 1 + 0 + 2^n(-1) = 1 - 2^n \\
(A^n)_{22} &= -1 + 2^n + 2^n = 2^{n+1} - 1 \\
(A^n)_{23} &= 1 - 2^n + 0 = 1 - 2^n \\
(A^n)_{31} &= 1 + 0 + 2^n(-1) = 1 - 2^n \\
(A^n)_{32} &= -1 + 0 + 2^n = 2^n - 1 \\
(A^n)_{33} &= 1 + 0 + 0 = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification pour $n = 1$: on retrouve bien A.

Exercice n°3 (4 points)

On pose $E = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$, base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ avec $e_k(x) = x^k$, et :

$$f(P)(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

1. Linéarité de f.

Démonstration. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q)(x) &= 2x(\lambda P(x) + Q(x)) - (x^2-1)(\lambda P'(x) + Q'(x)) \\ &= \lambda(2xP(x) - (x^2-1)P'(x)) + (2xQ(x) - (x^2-1)Q'(x)) \\ &= \lambda f(P)(x) + f(Q)(x). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. □

2. f est un endomorphisme de E.
Pour $P(x) = a + bx + cx^2$, on a $P'(x) = b + 2cx$, donc :

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= 2x(a + bx + cx^2) - (x^2-1)(b + 2cx) \\ &= 2ax + 2bx^2 + 2cx^3 - bx^2 - 2cx^3 + b + 2cx \\ &= b + (2a + 2c)x + bx^2. \end{aligned}$$

Ce polynôme est de degré ≤ 2, donc $f(P) \in E$. Ainsi f est bien un endomorphisme de E.

3. Images des vecteurs de base.

$$\begin{aligned} f(e_0) &= f(1) : a = 1, b = 0, c = 0 \Rightarrow f(e_0)(x) = 0 + 2x + 0 = 2x = 2e_1 \\ f(e_1) &= f(x) : a = 0, b = 1, c = 0 \Rightarrow f(e_1)(x) = 1 + 0 \cdot x + x^2 = e_0 + e_2 \\ f(e_2) &= f(x^2) : a = 0, b = 0, c = 1 \Rightarrow f(e_2)(x) = 0 + 2x + 0 = 2x = 2e_1 \end{aligned}$$

4. Matrice de f dans $\mathcal{B}$.
Les colonnes sont les coordonnées des images dans $\mathcal{B}$:

$$f(e_0) = 2e_1 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_1) = e_0 + e_2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = 2e_1 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

5. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1,\, e_0 + e_2)$.
D'après les calculs ci-dessus, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{Vect}(2e_1, e_0 + e_2, 2e_1)$.
Comme $2e_1$ et $e_0 + e_2$ sont non colinéaires (l'un est un multiple de e_1, l'autre n'en est pas), ils forment une famille libre de cardinal 2. Donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1,\, e_0 + e_2).$$

Vérification par le théorème du rang : $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = 3$. On a $\dim\mathrm{Im}(f) = 2$, donc $\dim\ker(f) = 1$. Effectivement, $f(ae_0 + be_1 + ce_2) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ et $a + c = 0$, soit $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_0 - e_2)$.

Exercice n°4 (2 points)

L'équation est $y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0$ (E).

1. Changement de variable $z = 1/y$.

Démonstration. Soit y une solution de (E) ne s'annulant pas. On pose $z = \dfrac{1}{y}$, donc $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$.

En divisant (E) par $-y^2$ (licite car y ne s'annule pas) :

$$-\frac{y'}{y^2}-\frac{a(x)}{y}-b(x)=0,$$

soit $z'-a(x)z-b(x)=0$, c'est-à-dire :

$$z'-a(x)z=b(x). \quad \text{(E')}$$

Cette équation est bien linéaire (du premier ordre). □

2. Solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ de $y'+y-xy^2=0$.
Ici $a(x)=1$ et $b(x)=-x$. L'équation (E') est :

$$z'-z=-x.$$

Solution homogène : $z_h=Ce^x$, $C\in\mathbb{R}$.
Solution particulière : On cherche $z_p=\alpha x+\beta$ (polynôme de degré 1).

$$\alpha-(\alpha x+\beta)=-x \Rightarrow -\alpha x+(\alpha-\beta)=-x.$$

On identifie : $\alpha=1$ et $\alpha-\beta=0$, donc $\beta=1$.
Ainsi $z_p=x+1$.
Solution générale de (E') : $z=Ce^x+x+1$.
Retour à y : $y=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{Ce^x+x+1}$, définie là où $Ce^x+x+1\neq 0$.
On étudie le signe de $g_C(x)=Ce^x+x+1$ sur $\mathbb{R}$ selon C :

— $C=0$: $g_0(x)=x+1$ s'annule en $x=-1$. Exclu.
— $C>0$: $g_C(x)\to-\infty$ quand $x\to-\infty$ (car $Ce^x\to 0$ et $x+1\to-\infty$), et $g_C(0)=C+1>0$, donc g_C s'annule sur $\mathbb{R}$. Exclu.
— $C=-1$: $g'_C(x)=Ce^x+1=0\Rightarrow x^*=\ln(-1/C)$. Valeur au maximum : $g_C(x^*)=\ln(-1/C)$. Pour $C=-1$, $\max=\ln(1)=0$: g_C s'annule. Exclu.
— $-1<C<0$: $\max=\ln(-1/C)>0$ $(-1/C>1)$: g_C s'annule. Exclu.
— $C<-1$: $\max=\ln(-1/C)<0$ (car $-1/C<1$) : $g_C<0$ sur tout $\mathbb{R}$. Convient.

Les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\boxed{y=\frac{1}{Ce^x+x+1}, \qquad C<-1.}$$

Problème (5 points)

On considère $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}$ et $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

1. Tableau de variations de f.
f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. On calcule :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$. Donc :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. Encadrement par intégrale.

Pour $k \geq 4 > e$, f est décroissante sur $[k, k+1]$. Par décroissance de f :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

En intégrant sur $[k, k+1]$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k).$$

De même, f est décroissante sur $[k-1, k]$, donc $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$... Attention, l'énoncé demande :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leq \frac{\ln k}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Ce qui se lit : f décroissante sur $[k-1, k+1]$ pour $k \geq 4$, donc $f(k) \geq f(x)$ pour $x \in [k, k+1]$ et $f(k) \leq f(x)$ pour $x \in [k-1, k]$. En intégrant :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leq \frac{\ln k}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\,dx. \quad \square$$

3. Encadrement de S_n.

On utilise la primitive $F(x) = \dfrac{\ln^2 x}{2}$ (car $F'(x) = \dfrac{\ln x}{x}$).

En sommant l'encadrement de la question 2 pour $k = 4, \ldots, n$:

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leq \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Les sommes télescopiques donnent :

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leq S_n - \sum_{k=1}^{3} \frac{\ln k}{k} \leq \int_3^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx,$$

soit :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 4}{2} \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2},$$

où $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$.

On pose $A = \dfrac{\ln^2 4}{2}$ et $C = \dfrac{\ln^2 3}{2}$, qui sont bien des constantes réelles positives :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2 n}{2} - C.$$

4. Limite de S_n.

Comme $\dfrac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B$ et $\dfrac{\ln^2(n+1)}{2} \to +\infty$, on conclut que $S_n \to +\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.$$

5a. $\ln^2(n+1) \sim_{n\to+\infty} \ln^2 n$**.**

Démonstration. On a $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + O\left(\frac{1}{\ln n \cdot n}\right)$ ... Plus simplement :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc $\ln(n+1) \sim \ln n$, et par composition : $\ln^2(n+1) \sim \ln^2 n$. □

5b. Équivalent de S_n.

De l'encadrement de la question 3, en divisant par $\frac{\ln^2 n}{2}$ (qui tend vers $+\infty$) :

$$\frac{\ln^2(n+1)/2 - A}{\ln^2 n/2} \leq \frac{S_n - B}{\ln^2 n/2} \leq \frac{\ln^2 n/2 - C}{\ln^2 n/2}.$$

Le membre gauche $\to \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n} \to 1$ (par 5a), et le membre droit $\to 1$. Par le théorème des gendarmes :

$$\frac{S_n - B}{\ln^2 n/2} \to 1,$$

soit $S_n - B \sim \frac{\ln^2 n}{2}$. Puisque B est une constante et $\frac{\ln^2 n}{2} \to +\infty$:

$$\boxed{S_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2 n}{2}.}$$