Chapitre 1 : Logique

M. Calciano

I. Généralités — Assertions

Une **assertion** est une phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse.

Ex : « 3 est un nombre impair. »

Par convention, si P est une assertion, on écrit le plus souvent « Supposons P » plutôt que « Supposons que P soit vraie ».

II. Connecteurs logiques

P et Q désignent deux assertions.

Négation : La négation de P, notée NON P, est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

Conjonction : P ET Q est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.

Disjonction : P OU Q est vraie lorsqu'au moins l'une des deux est vraie.

Équivalence : $P \Leftrightarrow Q$ est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité.

Implication : $P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse.

P	Q	P ET Q	P OU Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	NON P
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Ex : L'assertion « $3 = 4 \Rightarrow 8 = 2$ » est vraie puisque $3 = 4$ est fausse.

Remarque : À la manière du logicien Boole, on peut remplacer « vraie » par 1 et « fausse » par 0, et retrouver des opérations arithmétiques derrière ET, OU, etc.

III. Quelques propriétés

Soient P, Q et R trois assertions :

- P ET (NON P) est fausse.
- P OU (NON P) est vraie (principe du *tiers-exclu*).
- Non(Non$P$) et P sont équivalentes.
- Non(P OU Q) et (NON P) ET (NON Q) sont équivalentes (loi de De Morgan).
- P OU (Q OU R) et (P OU Q) OU R sont équivalentes (associativité).

Preuve : Utiliser une table de vérité.

Exercice d'application

À l'aide d'une table de vérité, montrer que :

1. [Non(P ET Q)] et [(NON P) OU (NON Q)] sont équivalentes.
2. [(P ET Q) ET R] et [P ET (Q ET R)] sont équivalentes.

Tables de vérité :

P	Q	P ET Q	Non(P ET Q)	NON P	NON Q	NON P OU NON Q
0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

P	Q	R	P ET Q	(P ET Q) ET R	Q ET R	P ET (Q ET R)
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

IV. Autres propriétés

Soient P et Q deux assertions :

- $P \Rightarrow Q$ est équivalente à (NON P) OU Q.
- $P \Leftrightarrow Q$ est équivalente à $(P \Rightarrow Q)$ ET $(Q \Rightarrow P)$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	NON P	Q	(NON P) OU Q
0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1

V. Quelques remarques

- Ne jamais utiliser le symbole $\Rightarrow$ comme un « donc ». Par exemple, « Il pleut $\Rightarrow$ Le sol est mouillé » est vraie même s'il ne pleut pas ; elle ne sous-entend pas qu'il pleuve.
- $P \Rightarrow Q$ signifie : « P est une **condition suffisante** pour que Q soit vraie ».
- $P \Rightarrow Q$ signifie aussi : « Q est une **condition nécessaire** pour que P soit vraie ».
- $P \Leftrightarrow Q$ signifie : « P est vraie *si et seulement si* Q est vraie ».
- **La négation d'une implication n'est pas une implication :** Non$(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à P ET (NON Q).

VI. Modes de raisonnement

6.1 Raisonnement par contraposée

Soient P et Q deux assertions. La *contraposée* de $P \Rightarrow Q$ est (NON Q) $\Rightarrow$ (NON P). Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Ex : Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration. *Montrons la contraposée : si n est impair alors n^2 est impair. Si n est impair, alors $\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k+1$ et $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$, qui est bien impair.*

6.2 Raisonnement par double implication

Pour montrer $P \Leftrightarrow Q$, on montre $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Ex : Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que n^2 est impair si et seulement si n est impair.

Démonstration. *($\Rightarrow$) Si n est impair, $\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k+1$, donc $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$ est impair.*
($\Leftarrow$) Par contraposée : si n est pair, $\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k$, donc $n^2 = 4k^2$ est pair.

6.3 Raisonnement par disjonction de cas

Il peut être utile de séparer les différents cas de figure possibles.

6.4 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une assertion P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une contradiction.

Ex : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. *Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair. Posons $p = 2p'$; on obtient $4p'^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2p'^2$ pair, donc q est pair. Or p et q sont premiers entre eux : contradiction.*

6.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Analyse : On suppose a priori que l'objet existe pour déterminer ses propriétés.
Synthèse : On définit l'objet et on vérifie qu'il est solution du problème.
Conclusion : On donne la ou les solutions.

Ex : Déterminer les réels x tels que $\sqrt{1+x} \geq 0$ et $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}$.

Démonstration. *Analyse. Si $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}$, alors en élevant au carré : $(1-x^2)^2 = 1+x$, soit $x^4 - 2x^2 - x = 0$, i.e. $x(x^3 - 2x - 1) = 0$. Comme -1 est racine évidente de $x^3 - 2x - 1$, on factorise : $x^3 - 2x - 1 = (x+1)(x^2 - x - 1)$. Les racines de $x^2 - x - 1$ sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Solutions potentielles : $0, -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.*

Synthèse. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est à rejeter car $1 - x^2 < 0$ en ce point.

Conclusion. Les solutions sont 0, -1 et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

VII. Les quantificateurs

7.1 Définitions

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E :

- $\forall x \in E,\ P(x)$: vraie si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.
- $\exists x \in E,\ P(x)$: vraie s'il existe au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.
- $\exists!\, x \in E,\ P(x)$: vraie s'il existe un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.

Ex : $\exists n \in \mathbb{Z},\ n + 1 = 0$ est vraie, mais $\forall n \in \mathbb{Z},\ n + 1 = 0$ est fausse.

7.2 Négations

- La négation de $[\forall x \in E,\ P(x)]$ est $[\exists x \in E,\ \mathrm{Non}(P(x))]$.
- La négation de $[\exists x \in E,\ P(x)]$ est $[\forall x \in E,\ \mathrm{Non}(P(x))]$.

Exercice d'application

Écrire la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x \in E,\ A(x) \Rightarrow B(x)$
2. $\forall x \in E,\ A(x) \Leftrightarrow B(x)$

Solutions :

1. $\exists x \in E,\ A(x)$ ET $\mathrm{Non}B(x)$
2. $\exists x \in E,\ [A(x)$ ET $\mathrm{Non}B(x)]$ OU $[\mathrm{Non}A(x)$ ET $B(x)]$

7.3 Succession de quantificateurs

L'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ a une importance : intervertir $\exists$ et $\forall$ change en général le sens de l'assertion.

Ex :
$A : \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(a)$ signifie que $f(a)$ est un minimum absolu de f.
$B : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(a)$ ne dit rien de significatif.

Remarque : On peut en revanche inverser sans problème deux quantificateurs $\forall$ consécutifs, ou deux quantificateurs $\exists$ consécutifs.

VIII. Le raisonnement par récurrence

8.1 Théorème

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Démonstration. *Lemme (admis) : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

Raisonnons par l'absurde : supposons que P ne soit pas vérifiée sur tout $\mathbb{N}$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)$ est fausse$\}$ est non vide, il admet donc un plus petit élément n_0. Comme $P(0)$ est vraie, $n_0 > 0$, donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Or $n_0 - 1 \notin A$ (minimalité de n_0), donc $P(n_0 - 1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $P(n_0)$ est vraie : contradiction.

8.2 Remarques

On peut amorcer la récurrence à partir d'un rang n_0 : si $P(n_0)$ est vraie et $\forall n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Ex : Montrer par récurrence qu'à partir d'un certain rang $n! \geq 2^{n+1}$.

8.3 Récurrence forte

Soit P une propriété sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N},\ [P(0) \text{ ET } \cdots \text{ ET } P(n-1)] \Rightarrow P(n)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Démonstration. *On démontre par récurrence simple que H_n : "$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ P(k)$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque : Dans un raisonnement par récurrence, l'hypothèse de récurrence ne peut jamais porter sur tout $\mathbb{N}$, car c'est précisément ce que l'on cherche à démontrer.

Exercice

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$.

1. Exprimer $u_{n+1} - u_{n-1}$ en fonction de u_n.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est pair.

IX. Les ensembles

9.1 Définitions et écriture

Soit E un ensemble. On écrit $x \in E$ si x appartient à E, $x \notin E$ sinon. L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

Si E est fini, on note $\mathrm{Card}(E)$ son nombre d'éléments.

Écriture en extension : $A = \{x, y, z\}$; $\{a\}$ est un *singleton* ; $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Écriture en compréhension : $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 = 0\}$.

9.2 Inclusion

$A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B. $A = B$ si $A \subset B$ et $B \subset A$.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

9.3 Opérations sur les parties

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E :

- **Réunion :** $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- **Intersection :** $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- **Complémentaire :** $\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$.
- **Différence :** $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$.

9.4 Propositions

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E :

- **Distributivité :** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- **Lois de De Morgan :** $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

9.5 Partition

Une famille $(A_1, \dots, A_n)$ de sous-ensembles de E est une **partition** de E si les A_i sont deux à deux disjoints et si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$.

Exemple : Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\{A, \bar{A}\}$ est une partition de E.

9.6 Cardinalité

Si E et F sont finis et disjoints : $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.

Pour A, B sous-ensembles finis d'un ensemble E :

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B), \quad \text{Card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

9.7 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E,\ y \in F\}$.

Remarque : Pour $E \neq F$, $E \times F \neq F \times E$ en général.

Plus généralement, le **produit cartésien** de $E_1, \dots, E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ avec $x_i \in E_i$.

X. Exercices

Exercice n°0

Soient P et Q deux assertions. Montrer à l'aide d'une table de vérité que :

1. $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(\text{Non}Q) \Rightarrow (\text{Non}P)]$
2. $[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(\text{Non}P) \Leftrightarrow (\text{Non}Q)]$
3. $[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P)]$

Exercice n°1

Soient a, b, c, d quatre réels tels que $a \neq b$. Montrer qu'il existe une unique fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$.

Exercice n°2

Soient a et b deux réels non nuls simultanément, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + b$. Montrer que si f s'annule, alors $ab \leq 0$.

Exercice n°3

Soit n un entier relatif. Montrer que $\dfrac{n^2 + n}{2}$ est un entier.

Exercice n°4

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut se décomposer en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice n°5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Considérer la proposition $\mathcal{P} : \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

1. Écrire la réciproque de cette implication.
2. Écrire la négation de cette implication.
3. Écrire la contraposée de cette implication.
4. Écrire la contraposée de la réciproque de cette implication.

Exercice n°6

Pour $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x \leq y$
2. $\exists y \in E,\ \forall x \in E,\ x \leq y$
3. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x < y$
4. $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x \leq y$

Exercice n°7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Soit $M \in \mathbb{R}$, écrire une assertion exprimant que f est majorée par M.
2. Écrire une assertion exprimant que f est majorée.
3. Écrire une assertion exprimant que f n'est pas majorée.

Exercice n°8

Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est un produit de nombres premiers.

Exercice n°9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Traduire par une phrase :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice n°10

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x + 1| = 4 - |3x - 2|$.

Exercice n°11

Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice n°12

Soient E et F deux ensembles. Montrer que $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Exercice n°13

Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice n°14

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m + n) = f(m) + f(n)$.

Exercice n°15

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

Exercice n°16

Soit n un entier non nul. Démontrer que :

1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice n°17

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.
2. Pourquoi parle-t-on ici de récurrence double ? S'agit-il d'une récurrence forte ?

Exercice n°18

Soient E et F deux ensembles.

1. Montrer que $F \subset E \Leftrightarrow E \cap F = F$.
2. Montrer que $F \subset E \Leftrightarrow E \cup F = E$.

Exercice n°19

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. Démontrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. Démontrer les lois de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice n°20

Soient A et B deux parties d'un ensemble. On définit $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice n°21

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Montrer que l'ensemble des applications de E vers F est de cardinal n^p.

Exercice n°22

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que u_n est bien défini (i.e. $u_n + 2 \neq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique ; préciser son premier terme et sa raison.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis de n. En déduire le comportement de (u_n) lorsque $n \to +\infty$.