Chapitre 3 : Les nombres complexes

M. Calciano

Introduction : Entre le XV^e et le XVI^e siècle, des algébristes italiens ont poursuivi l'aventure de la résolution des équations, qui avait vu l'invention des fractions pour construire des solutions à des équations du type $3x = 5$, des racines carrées pour résoudre $x^2 = 2$, et donc une nouvelle catégorie de nombres pour résoudre des équations du type $x^2 = -1$.

I. L'ensemble des nombres complexes

a) Définition

La construction du corps des complexes n'étant pas au programme, on admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication, et possédant un élément i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Définition I.1. Tout nombre complexe s'écrit de manière unique $x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle x la **partie réelle** du complexe et y sa **partie imaginaire**.

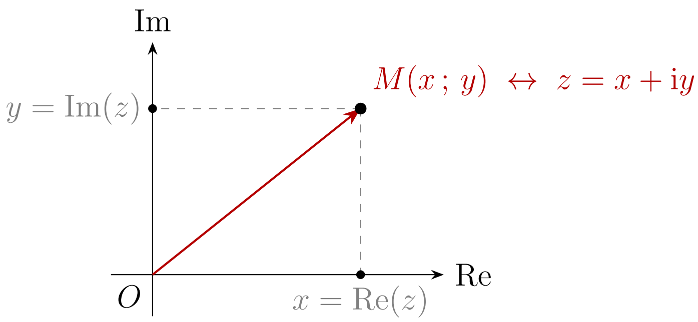

Figure 1: Représentation d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ dans le plan complexe.

Remarque : Les nombres complexes sont des nombres à la profonde essence géométrique ; nous le détaillerons précisément dans le II. Toutefois, nous risquons d'avoir besoin, pour faciliter les démonstrations, de l'identification au plan complexe. Ainsi, tout point $M(x\,;\,y)$ du plan sera associé à un nombre complexe $z_M = x + \mathrm{i}y$ (nous verrons que ce complexe s'appelle l'affixe). Les opérations algébriques sur les complexes auront leur correspondance en transformations géométriques (et réciproquement).

b) Addition et multiplication

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$. Alors :

$$z + z' = (x + x') + \mathrm{i}(y + y'), \qquad zz' = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + yx').$$

c) Remarques

- On a $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Le complexe $0 + 0\mathrm{i}$ se note simplement 0.
- Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur** ; leur ensemble se note $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

d) Conséquence de l'unicité d'écriture

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
Démonstration : Soient $z = x + \mathrm{i}y$ *et* $z' = x' + \mathrm{i}y'$*. Si* $z = z'$*, alors* $x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y'$*, soit* $(x-x')+\mathrm{i}(y-y') = 0 = 0+0\mathrm{i}$*. L'unicité d'écriture implique* $x - x' = 0$ *et* $y - y' = 0$*, c'est-à-dire* $x = x'$ *et* $y = y'$*.* □

e) Extension de quelques propriétés calculatoires (liste non exhaustive)

Propriété I.1. $zz' = 0 \Rightarrow z = 0$ *ou* $z' = 0$*.*

Propriété I.2 (Binôme de Newton)**.** *Pour tout* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k\, z_2^{n-k}.$$

Propriété I.3 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)**.** *Pour tout* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $p \leq q$ *et* $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *:*

$$\sum_{k=p}^{q} z^k = \frac{z^p(z^{q-p+1} - 1)}{z - 1}.$$

Propriété I.4 (Factorisation)**.** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ *:*

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

f) Différence majeure entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Il n'y a pas de relation d'ordre compatible avec les complexes comme c'est le cas pour les réels. Si une telle relation existait, on aurait $1^2 = 1 > 0$ et $\mathrm{i}^2 = -1 > 0$, ce qui est contradictoire.

g) Conjugué d'un nombre complexe

Définition I.2. Pour tout complexe z, on appelle **conjugué** de z, noté $\bar{z}$, le complexe défini par $\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{i}$. (Une interprétation géométrique sera donnée dans le II.)

Propriété I.5. *Pour tout nombre complexe* z *:*

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Démonstration : Il suffit de faire le calcul directement. □

Propriété I.6. *Un nombre complexe est réel si et seulement si* $z = \bar{z}$*.*

Propriété I.7. *Pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *:*

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Démonstration (pour le produit) : On a : $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y')} = (xx' - yy') - \mathrm{i}(yx' + xy')$*.*
D'autre part : $\bar{z}_1\, \bar{z}_2 = (x - \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = (xx' - yy') - \mathrm{i}(yx' + xy')$*.* □

h) Module

Définition I.3. Pour tout nombre complexe z, le **module** de z, noté $|z|$, est défini par

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Propriété I.8. *Pour tout complexe z : $|\bar{z}| = |-z| = |z|$; $|z| = 0 \iff z = 0$; $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.*

Démonstration : Utiliser le fait que $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$. □

Exemple : Déterminer $|3 - \mathrm{i}|$ et $|2 + 3\mathrm{i}|$.

i) Formules sur le produit, le quotient et l'inverse

Propriété I.9. *Pour tout complexe $z \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$. Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:*

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0).$$

Démonstration : On calcule $|z_1 z_2|^2 = (xx' - yy')^2 + (yx' + xy')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = |z_1|^2 |z_2|^2$. Pour l'inverse : $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ donc $|z| \cdot |\frac{1}{z}| = 1$, d'où $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$. Le quotient s'en déduit. □

j) Inégalités triangulaires

Proposition I.1 (Première inégalité triangulaire)**.** *Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

avec égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $u \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_2 = u z_1$.

Démonstration : On développe : $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ et $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2|$. L'inégalité équivaut donc à $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1|\,|z_2|$, ce qui résulte de $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1|\,|z_2|$. L'égalité a lieu si et seulement si $z_1 = 0$ ou $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}^+$ (voir exercice). □

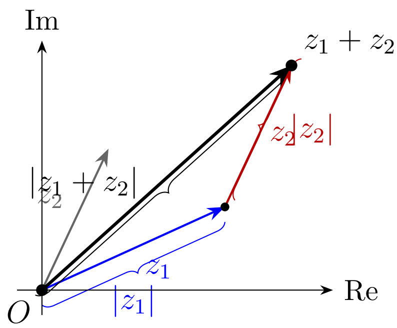

Figure 2: Illustration de l'inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Proposition I.2 (Deuxième inégalité triangulaire)**.** *Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|.$$

<u>Exercice n°1</u>

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $\dfrac{z^2 - 1}{z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

II. Applications géométriques et argument d'un complexe

Le plan usuel étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tout point M est caractérisé par un unique couple $(x\,;\,y)$ vérifiant $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.

a) Affixe

Définition II.1. Le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est appelé **affixe** de $\overrightarrow{OM}$ ou affixe du point M.

Proposition II.1. *Si A et B sont deux points d'affixes a et b, alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.*

Démonstration : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, *dont l'affixe est $b - a$.* □

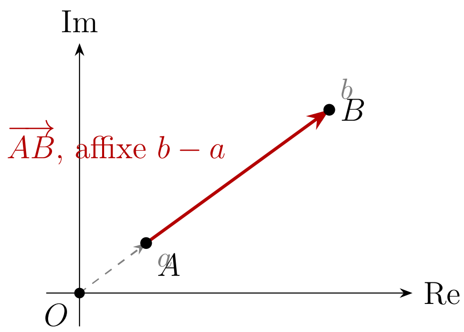

Figure 3: L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.

b) Interprétation géométrique du conjugué et du module

Propriété II.1. *Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.*

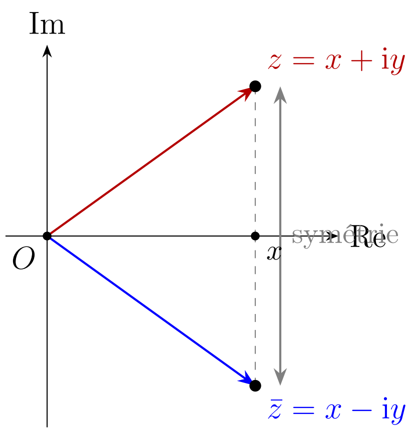

Figure 4: z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Propriété II.2. *Si z_1 et z_2 sont deux complexes, alors $|z_1 - z_2|$ est la distance séparant les points d'affixes z_1 et z_2.*

Exemple : Décrire les ensembles :

$$A_1 = \left\{ M_z \in \mathcal{P} \mid |z - 2 + 3\mathrm{i}| = 4 \right\} \quad \text{et} \quad A_2 = \left\{ M_z \in \mathcal{P} \mid |z - 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 + 5\mathrm{i}| \right\}.$$

c) Argument

Lemme II.1. *Pour tout point M du cercle trigonométrique, il existe un réel θ tel que l'abscisse de M est $\cos\theta$ et son ordonnée est $\sin\theta$. Ce réel est unique si l'on impose $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$.*

Par extension, tout point du plan de module r est repéré par $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Définition II.2. Ce nombre θ est appelé **argument** du complexe. Le module est unique, mais l'argument est défini modulo 2π.

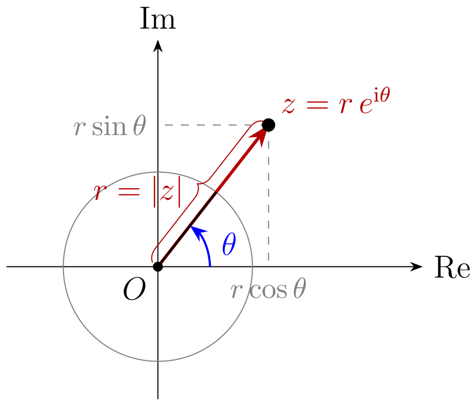

Figure 5: Module $|z| = r$ et argument θ d'un nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$.

Proposition II.2. *Soient z_1 et z_2 deux complexes non nuls d'arguments respectifs θ_1 et θ_2. Alors :*

- *un argument de $\bar{z}_1$ est $-\theta_1$;*
- *un argument de z_1z_2 est $\theta_1 + \theta_2$;*
- *un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est $\theta_1 - \theta_2$;*
- *un argument de z_1^n est $n\theta_1$.*

Corollaire II.1 (Géométrique)**.** *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module et des arguments égaux modulo 2π.*

Démonstration : Voir l'exercice final du cours. □

d) Une application géométrique

Proposition II.3. *Soient A, B, C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c. Toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un argument du complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$.*

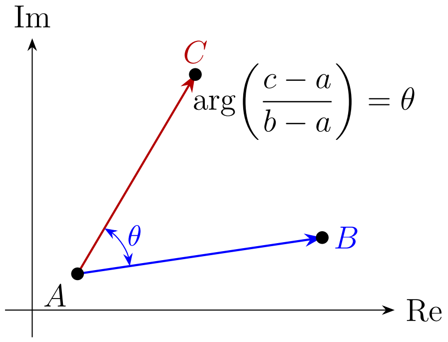

Figure 6: L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$.

Remarque : Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. On a $\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta},\ \theta \in]-\pi;\pi]\}$.
Exemple. Le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé direct, est identifié à $\mathbb{C}$.

1. Placer sur le repère les points $A\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.

2. Donner une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. En déduire la nature du triangle ABC et en calculer le périmètre.

3. Montrer que les points A, C et D sont alignés.

III. Exponentielle complexe et résolution d'équations

a) Exponentielle complexe $e^{i\theta}$ avec θ réel

Le fait qu'un argument de $z_1 z_2$ soit $\theta_1 + \theta_2$ rappelle une propriété de l'exponentielle réelle. D'où l'idée de désigner le complexe $\cos\theta + i\sin\theta$ par $e^{i\theta}$.

On a ainsi :

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}, \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}.$$

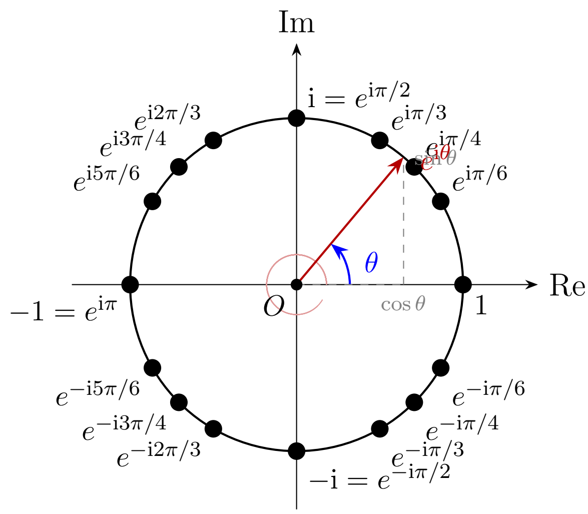

Figure 7: Le cercle trigonométrique : points remarquables $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque : 1. Les complexes de la forme $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) sont de module 1 : ils sont situés sur le cercle trigonométrique.
2. À partir de l'exponentielle complexe, on retrouve :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercice n°2
Écrire sans l'exponentielle $e^{i\pi/2}$ et $e^{i\pi}$.

b) Propositions

Soit z un complexe non nul.

Proposition III.1. *1. Si $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Démonstration : Le point d'affixe z est sur le cercle trigonométrique, donc ses coordonnées sont $(\cos\theta\,;\sin\theta)$, d'où $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.* □

2. Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On a $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$ si et seulement si $\theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}$ (i.e. il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \varphi + 2k\pi$). Démonstration : Géométriquement, les deux complexes représentent le même point du cercle trigonométrique, à un nombre entier de tours k près. □

*3. Il existe $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que $z = r_0 e^{i\theta_0}$ (**écriture exponentielle**). Démonstration : Il suffit de considérer $r_0 = |z|$ et z/r_0, qui est de module 1.* □

Remarque : Bien que 0 n'ait pas d'argument, on écrit $0 = 0\,e^{i\theta}$ pour n'importe quelle valeur θ — cela revient à utiliser une boussole au pôle nord...

Exercice n°3
Soient $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ avec $z_2 \neq 0$. Donner les écritures exponentielles de $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_1$ et z_1^n.

On a :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \quad \bar{z}_1 = r_1\, e^{-i\theta_1}, \quad z_1^n = r_1^n\, e^{in\theta_1}.$$

Propriété III.1. *Tout nombre complexe z admet une écriture de la forme $z = |z|\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$, appelée **forme trigonométrique** de z.*

c) Exponentielle complexe e^z avec $z \in \mathbb{C}$

Définition III.1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}\, e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.

Propriété III.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

- $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$;
- *si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $e^{z+z'} = e^z\, e^{z'}$;*
- $e^z \neq 0$ *et* $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

d) Racine d'une équation polynomiale

Une équation algébrique complexe est une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ de la forme $P(z) = 0$, où P est une fonction polynomiale.

Proposition III.2. *Si P est une fonction polynomiale à coefficients complexes et si a est une racine de P, alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients complexes telle que :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z-a)\,Q(z).$$

Démonstration : Utiliser la factorisation de $z^k - a^k$ par $z - a$. □

Remarque : La réciproque est immédiate. Si le degré de P est n, alors celui de Q est $n-1$.

Exercice n°4

Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En remarquant que $P(1) = 0$, factoriser totalement P.

On a $z^3 - 2z^2 - 5z + 6 = (z-1)(z^2 - z - 6)$. On résout ensuite $z^2 - z - 6 = 0$: $\Delta = 25$, donc $z = \dfrac{1 \pm 5}{2}$. Les solutions sont 1, 3 et -2.

e) Racines carrées

Définition III.2. On appelle **racine carrée** d'un complexe z tout nombre complexe Z tel que $Z^2 = z$.

Proposition III.3. *Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.*

Démonstration : Elle est traitée en même temps que l'exemple ci-dessous. □

Exercice n°5

Déterminer les racines carrées de $21 - 20\mathrm{i}$.

On cherche $x + \mathrm{i}y$ tel que $(x+\mathrm{i}y)^2 = 21 - 20\mathrm{i}$. Par identification : $x^2 - y^2 = 21$ et $2xy = -20$, soit $xy = -10$. De plus $x^2 + y^2 = |21 - 20\mathrm{i}| = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$.

On obtient $2x^2 = 50$, soit $x = \pm 5$, et $2y^2 = 8$, soit $y = \pm 2$. Comme $xy < 0$, on obtient $\mathbf{5 - 2}\mathrm{i}$ et $\mathbf{-5 + 2}\mathrm{i}$.

f) Extension des équations du second degré réelles à $\mathbb{C}$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$: racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées distinctes $z_1 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration : Comme dans le cas réel, on utilise la forme canonique. □

g) Résolution d'équation du second degré – cas général

Proposition III.4. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.*

- *Si $\Delta = 0$: racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta \neq 0$, en notant δ une racine carrée de Δ : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.*

Démonstration : Comme dans le cas réel, on utilise la forme canonique. □

Exemple : Résoudre $z^2 - (3+4\mathrm{i})z - 1 + 5\mathrm{i} = 0$.

On calcule $\Delta = (3+4\mathrm{i})^2 - 4(-1+5\mathrm{i}) = -3+4\mathrm{i}$. On cherche $\delta = x + \mathrm{i}y$ tel que $\delta^2 = -3+4\mathrm{i}$: $x^2 - y^2 = -3$, $2xy = 4$, $x^2 + y^2 = 5$. D'où $\delta = 1 + 2\mathrm{i}$ (ou $-1-2\mathrm{i}$), et :

$$z = \frac{(3+4\mathrm{i}) \pm (1+2\mathrm{i})}{2} \implies z_1 = 2+3\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z_2 = 1+\mathrm{i}.$$

h) Relations entre coefficients et racines

Proposition III.5. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Si z_1 et z_2 sont deux racines de $az^2+bz+c = 0$, alors :*

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration : Expliciter les solutions et vérifier le produit et la somme. □

<u>Exercice n°6</u>

Montrer que si s et p sont deux nombres complexes, alors z_1 et z_2 vérifient le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ si et seulement si z_1 et z_2 sont les deux racines de $z^2 - sz + p = 0$.

Si z_1 et z_2 sont les racines de $z^2 - sz + p = 0$, les relations coefficients–racines donnent $z_1 + z_2 = s$ et $z_1 z_2 = p$. Réciproquement, si $z_1 + z_2 = s$ et $z_1 z_2 = p$, alors $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - sz + p$, donc z_1 et z_2 en sont bien les racines.

IV. Exercices

<u>Exercice n°0</u>

1. Écrire le tableau des valeurs remarquables des cosinus et sinus.
2. Soit $z = -3\,e^{\mathrm{i}\pi/3}$; donner son module et un argument.
3. Écrire $z = 1 - \mathrm{i}$ sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
4. Écrire $z = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \mathrm{i}}$ sans complexe au dénominateur.
5. Dans le plan, on donne $M(3, -4)$; donner l'affixe correspondante.
6. Soit $z = e^{\mathrm{i}\pi/3}$; calculer $1 + z + z^2$ de deux façons différentes.
7. Exprimer, pour tout réel θ, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{\mathrm{i}\theta}$ et $e^{-\mathrm{i}\theta}$.

Exercice n°1
Pour $z \in \mathbb{C}^*$, établir que $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|z| = 1$ ou $z \in \mathbb{R}^*$.

Exercice n°2 (oraux concours)
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et de même module. Montrer que

$$U = \frac{(z+z')^2}{zz'}$$

est un nombre réel positif.

Exercice n°3
Soit $\theta \in [0, \pi]$ et $z = 1 + \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. Donner la forme exponentielle de z.

Exercice n°4
Résoudre l'équation $\mathrm{i}z^2 + (3+\mathrm{i})z + 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

Exercice n°5
Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z-1| = |z-\mathrm{i}|$:

1. par un raisonnement purement géométrique ;
2. par un raisonnement purement algébrique.

Exercice n°6
Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1 z_2 \neq -1$. On pose $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

1. Montrer que Z est réel.
2. Évaluer Z en fonction des arguments de z_1 et z_2.

Exercice n°7 (youtu.be/1OIKtHO_iKs)
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. l'équation $e^z = 1 + \mathrm{i}$;
2. l'équation $e^z + e^{-z} = 2\mathrm{i}$;
3. l'équation $e^z = a$ (avec $a \in \mathbb{C}$).

Exercice n°8
Déterminer les racines carrées de $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Exercice n°9
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $6z^2 - (5-\mathrm{i})z + 2 - \dfrac{5\mathrm{i}}{6} = 0$;
2. $z^3 + (1-\mathrm{i})z^2 - z + 1 - 3\mathrm{i} = 0$, après avoir démontré qu'elle possède une solution imaginaire pure.

Exercice n°10
Résoudre l'équation $z^2 - (1 + a + a^2)z + a + a^3 = 0$ où a désigne un complexe.

Exercice n°11
Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer z pour que les points d'affixes z, z^2 et z^3 :

1. soient alignés ;
2. forment un triangle rectangle ;
3. forment un triangle rectangle isocèle.

Exercice n°12
Montrer que trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c forment un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice n°13
Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + \dfrac{1}{z}$.

1. Est-ce que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$?
2. Est-ce que $\forall z' \in \mathbb{C}, \exists!\, z \in \mathbb{C}^*, z' = f(z)$?

Exercice n°14
Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|ab + bc + ac| = |a + b + c|$.

Exercice n°15
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Notons $\theta = \arg(z)$. Montrer que $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + |z|}$.

Exercice n°16 (oraux concours)
Soit $n \geq 2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$

Exercice n°17

1. Déterminer les racines carrées, sous forme algébrique, de $z = 1 + \mathrm{i}$.
2. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n°18
Soient A, B et C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC a pour affixe $a + b + c$.