Chapitre 4 : Fonctions usuelles

M. Calciano

I. Logarithme Népérien

On appelle logarithme Népérien et on note $\ln$ l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ qui s'annule en 1.

Propriété (https://youtu.be/ziI4tj_0sbo) :
Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Démonstration : pour y fixé, soit f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = \ln(xy)$.
Sa dérivée est : $\dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x}$.
Donc les fonctions $\ln(xy)$ et $\ln(x)$ ont leurs dérivées égales, donc elles ne diffèrent que d'une constante ; ainsi : $\exists C \in \mathbb{R},\ \ln(xy) = \ln(x) + C$.
Pour $x = 1$, on obtient $\ln(y) = C$.
Finalement : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Remarque : En découlent les relations suivantes, pour $x > 0$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

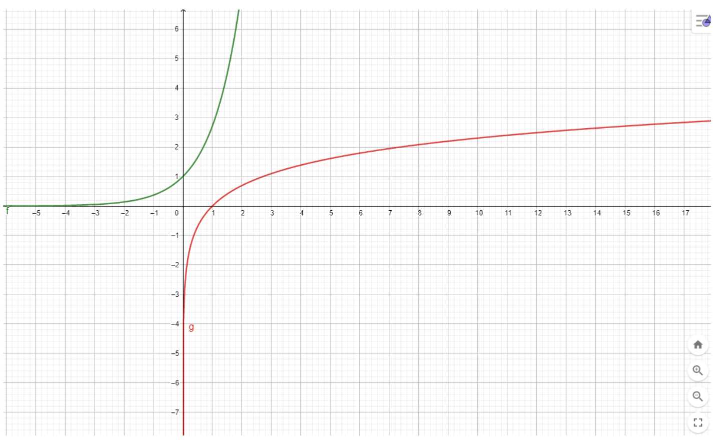
et pour tout $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

On a :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Démonstration : Comme la fonction $\ln$ est croissante, on sait déjà que $\lim_{x\to+\infty} \ln x$ existe et vaut soit un nombre réel, soit $+\infty$. Pour tout entier naturel n, on examine $\ln(2^n) = n\ln(2)$, or $\lim_{n\to+\infty} n \ln 2 = +\infty$ (car $\ln$ est croissante et $\ln(1) = 0$, donc $\ln(2) > 0$). Donc $\lim_{n\to\infty} \ln(2^n) = +\infty$; or si $\lim_{x\to+\infty} \ln x = L$, par unicité de la limite, $L = +\infty$.



On dit que la fonction $\ln$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$.

C'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique antécédent $x \in \mathbb{R}_*^+$ par $\ln$.

La notion de bijection sera revue plus précisément au paragraphe suivant.

Démonstration : Il s'agit d'une application du TVI, avec unicité de l'antécédent du fait de la stricte croissance de f.

II. Exponentielle

On appelle exponentielle et on note $\exp$ **la fonction réciproque de** $\ln$**.**

La fonction exponentielle est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \quad y = \exp(x) \iff x = \ln(y).$$

Démonstration : Évidente puisque $\ln$ *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}_*^+$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

En particulier :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

La fonction $\exp$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$**, continue sur** $\mathbb{R}$**, et** $(\exp(x))' = \exp(x)$**.**

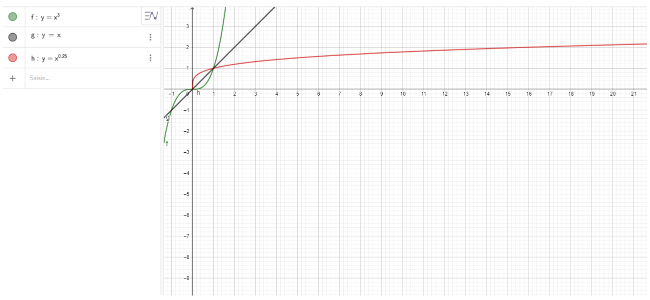
Démonstration : Dans le cas général des fonctions réciproques.

Pour tous réels x, y **on a** $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$**.**

Démonstration : soit $u = \exp(x)$ et $v = \exp(y)$.
$\exp(x+y) = \exp(\ln u + \ln v) = \exp(\ln(uv)) = uv = \exp(x)\cdot\exp(y)$.

Pour tout x **réel,** $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$**, et pour tous réels** x **et** y **:** $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$**.**

Démonstration : Immédiate en reprenant la propriété précédente !



Soit α un réel. On appelle **fonction puissance d'exposant** α la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

La fonction puissance est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et de dérivée : $\alpha\, x^{\alpha-1}$.

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x), \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

III. Quelques limites « classiques »

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to -\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Pour $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty.$$

IV. Croissances comparées

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0.$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^\alpha e^x = 0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

V. Fonctions circulaires directes

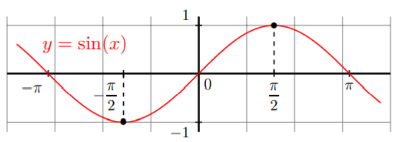
a) Premières propriétés

La fonction cosinus, notée cos, est 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.
La fonction sinus, notée sin, est 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.
La fonction tangente, notée tan, est π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, et

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

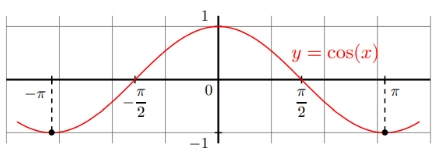
Pour le sinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\sin)'(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



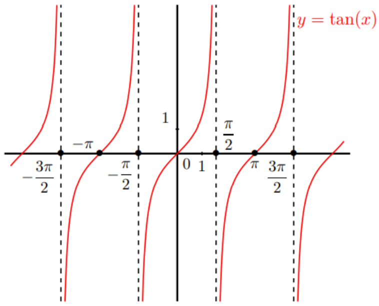
Pour le cosinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\cos)'(x)$	0		$-$		0
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



Pour la tangente :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	1 $+$	‖
$\tan(x)$	0 ↗	$+\infty$



b) Limites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration : Pour les deux premières, penser à un taux d'accroissement ; pour la dernière, multiplier par $1 + \cos(x)$*.*

c) Formule d'addition de la tangente

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Exercice n°1

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Exprimer $\cos(t)$, $\sin(t)$ et $\tan(t)$ en fonction de u.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$.

Soit $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$. On admet ici que f est dérivable sur $\mathbb{R}$; montrer que $f'(x) = \frac{3\cos 2x + 1}{(1+\cos^2 x)^2}$.

Éléments de correction. Comme $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a)(1 - \tan^2 a)$ et $1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$, on obtient :

$$\cos(2a) = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}, \qquad \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Par la formule de duplication :

$$\tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad \sin(t) = \cos(t)\tan(t) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

VI. Autour de la notion de bijection

Dans cette partie I désigne un intervalle d'intérieur non vide, a est un point de I, et f une fonction définie sur I.

On considère connue la définition des fonctions croissantes et décroissantes pour des fonctions non nécessairement dérivables.

a) Monotonie sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

- La fonction f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.
- La fonction f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.
- La fonction f est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.

Démonstration : Dans un prochain chapitre...

Rappels : Une fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, défini sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, admet une limite finie en a. Cette limite s'appelle alors le **nombre dérivé** et est notée $f'(a)$.

b) Stricte monotonie

Soit f une fonction dérivable sur I. Si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

Remarque : Même type de proposition pour une fonction strictement décroissante.

Démonstration : Dans un prochain chapitre...

Exercices :

Étudier les variations de f sur $]0,1[$: $x \mapsto 2x - \dfrac{1}{x}$.

On a $f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} \geq 0$.

Démontrer que sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x\cos(x) < \sin(x)$.

Soit $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$. On a $g'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x) \leq 0$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc g est décroissante et pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x) \leq g(0) = 0$, soit $x\cos(x) - \sin(x) < 0$.

c) Définition

Une application f de E vers F est dite **injective** si : $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Une application f de E vers F est dite **surjective** si : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$.

Une application f de E vers F est dite **bijective**, ou f est une **bijection**, si et seulement si $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$.

Ainsi, f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Exemple : L'application $t \mapsto t^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $y \in \mathbb{R}^+$, on cherche $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = x^2$; une seule solution $x = \sqrt{y}$.

Remarque : Une application bijective de E dans E est appelée **permutation** de E ; l'ensemble des permutations de E se note $\mathcal{S}(E)$.

d) Définition : application réciproque

Soit f une application bijective de E dans F. L'application de F dans E, qui à tout $y \in F$ associe l'unique $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$, s'appelle **l'application réciproque de** f, et se note f^{-1}.

Exemple : L'application $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1\,;1]$, $t \mapsto \sin(t)$ est bijective et son application réciproque est arcsin.

Exercice n°2

Soit l'application $f : [-2\,;+\infty[\to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x+2}$. Montrer que f est bijective, et donner l'expression de son application réciproque.

On a f dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$. Donc f est strictement croissante. On a $\lim_{x\to -2} \sqrt{x+2} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$, donc f réalise une bijection strictement croissante de $[-2\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$. Soit $y \in]0\,;+\infty[$, on cherche $x \in [-2\,;+\infty[$ tel que $y = \sqrt{x+2}$. On a $y^2 = x+2$, d'où $x = y^2 - 2$. La fonction réciproque est $f^{-1}(x) = x^2 - 2$.

e) Proposition

Définition : On définit l'**identité** sur E, la fonction notée Id_E qui à tout $x \in E$ renvoie x.

Si f est bijective de E dans F, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Démonstration : pour tout $x \in E$, on a $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ puisque $f(x)$ possède un unique antécédent...

Note : On va définir plus précisément la composée de fonctions et la notation « $\circ$ » un peu après !

Question : A-t-on $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$? Non : $\mathrm{Id}_E \neq \mathrm{Id}_F$ en général.

Soit f une application de E dans F, g une application de F dans E. Si $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et si $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Remarque : Il est indispensable de vérifier $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ ET $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration : Par symétrie, on va juste démontrer que f est bijective et que $f^{-1} = g$.

Soit $y \in F$, $\exists!\, x \in E$, $y = f(x)$?

Analyse : soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$, alors $g(y) = g \circ f(x)$, d'où $g(y) = x$.

Synthèse : soit $y \in F$, $g(y) \in E$, et $f(g(y)) = f \circ g(y) = y$.

On a bien l'unicité car si x' était un autre antécédent, alors $g(y) = x'$, d'où $x = x'$.

Soit f de E dans F bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Si f de E dans F et g de F dans G sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice n°

Démontrer les deux propositions précédentes.

Remarque importante : Si f est une application de E dans F et B une partie de F, la notation $f^{-1}(B)$ désignant l'image réciproque de B par f ne présage en rien du caractère bijectif de f !

VII. Étude des fonctions réciproques

a) Symétrie du graphe

Proposition : Soit Y une partie de $\mathbb{R}$ et $f : X \to Y$ une bijection. Alors les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Démonstration : Par définition !

$M(x,y)$ est sur la courbe représentative de f si et seulement si $y = f(x)$.

Or $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$, c'est-à-dire $M'(y, f^{-1}(y))$ est sur la courbe de f^{-1}.

b) Monotonie

Si $f : X \to Y$ est une bijection strictement monotone alors f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f.

Démonstration : Soient y_1 et y_2 deux éléments de Y tels que $y_1 < y_2$. Il existe un unique $(x_1, x_2) \in X^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si f est croissante, $x_1 < x_2$; or $f^{-1}(y_1) = x_1$ et $f^{-1}(y_2) = x_2$, donc f^{-1} est croissante.

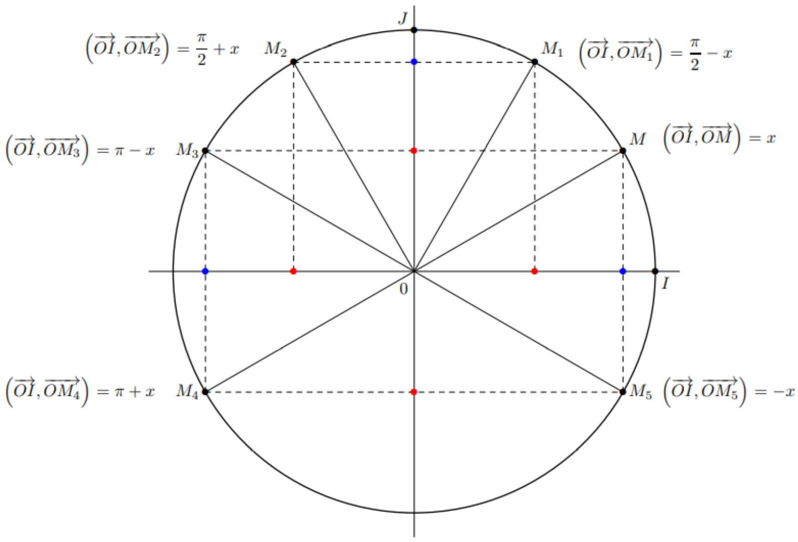
c) Dérivabilité

Soit J un intervalle, et $f : I \to J$ une bijection dérivable, $b \in J$ et $a = f^{-1}(b)$, alors :

- f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$;
- Si $f'(a) \neq 0$, alors $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ (de façon équivalente : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$).

VIII. Fonctions trigonométriques réciproques

La fonction sin est 2π-périodique. Une illustration : l'étude des fonctions trigonométriques réciproques. Préambule :



Formulaire à connaître par cœur !!!

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

- $\cos(\pi - x) = -\cos(x) \quad ; \quad \sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x) \quad ; \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x) \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin(x)$

- $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Fonctions circulaires réciproques

Arcsinus

La restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$. On appelle *Arc sinus* et on note Arcsin : $[-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sa bijection réciproque.
Ainsi : $y = \text{Arcsin}(x)$ et $x \in [-1;1] \iff x = \sin(y)$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Arccosinus

La restriction de la fonction cosinus à $[0;\pi]$ est une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$. On appelle *Arc cosinus* et on note Arccos : $[-1;1] \to [0;\pi]$ sa bijection réciproque.
Ainsi : $y = \text{Arccos}(x)$ et $x \in [-1;1] \iff x = \cos(y)$ et $y \in [0;\pi]$.

Arctangente

La fonction tangente est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *Arc tangente* et on note Arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sa bijection réciproque.
Ainsi : $y = \text{Arctan}(x)$ et $x \in \mathbb{R} \iff x = \tan(y)$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Propriétés

Les fonctions Arcsin et Arctan sont impaires.

Exercice n°3 :

Démontrer de façon générale que si $f : E \to F$ est bijective et impaire alors f^{-1} est impaire.
Et que dire dans le cas où f est paire ?

Formules

Pour tout réel x de $[-1;1]$, on a :

$$\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Pour tout x de $[-1;1]$,

$$\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour tout $x > 0$,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour tout $x < 0$,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Continuité et dérivabilité des fonctions circulaires réciproques

La fonction Arcsin est continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $]-1;1[$ et

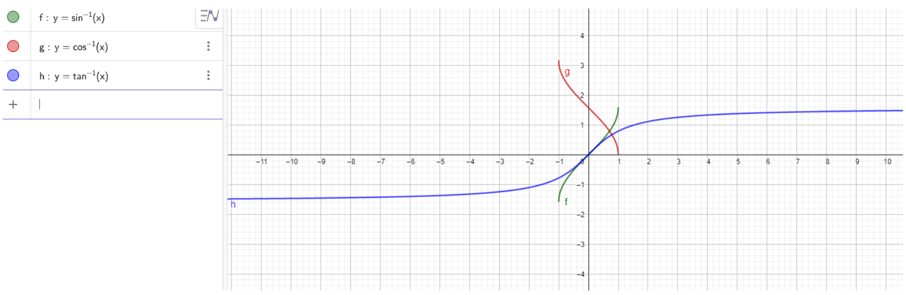
$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction Arccos est continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $]-1;1[$ et

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction Arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



IX. Fonctions hyperboliques

Définition

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Relation fondamentale

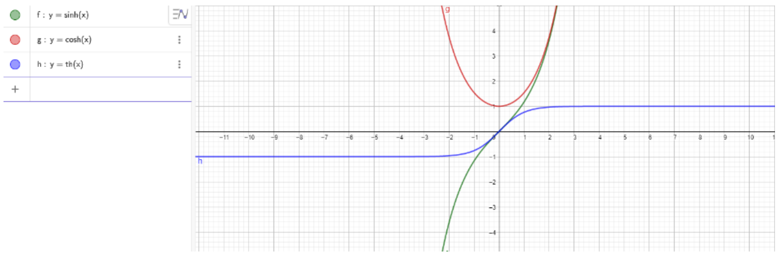
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

Propriétés

- La fonction ch est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.
- La fonction sh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
- La fonction th est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$



On a $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.

X. Partie entière

a) Définition

Étant donné x un nombre réel, il existe un unique entier relatif n tel que : $n \leq x < n+1$.

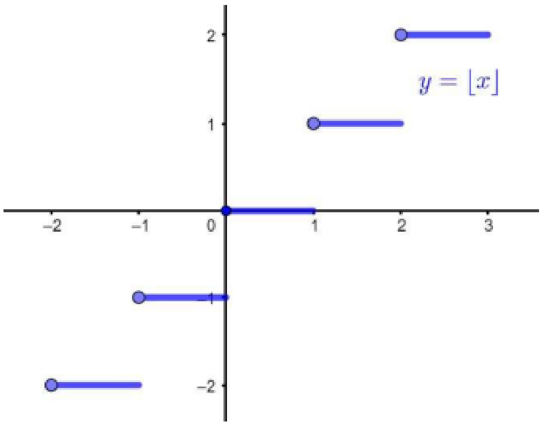
Ce nombre est appelé **partie entière** et se note $E(x)$.

Remarques : On n'a pas en général $E(x+y) = E(x) + E(y)$.

En effet : $E(1{,}5 + 1{,}7) \neq E(1{,}5) + E(1{,}7)$.

Ne pas confondre la partie entière avec la troncature à l'unité.

b) Courbe



c) Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) = n - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x) = n.$$

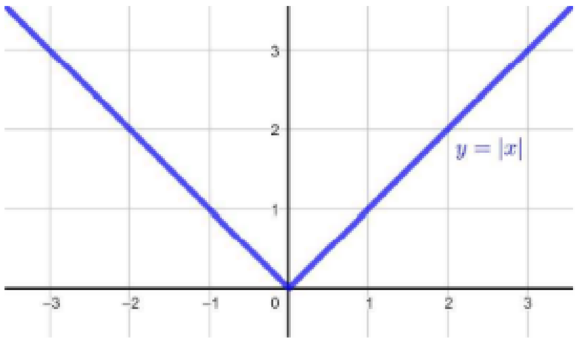
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est discontinue.

XI. Valeur absolue

La valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Représentation graphique :



XII. Exercices

Exercice n°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x^2 - 1) + \ln 4 = \ln(4x - 1)$

b) $\ln|x - 1| + \ln|x + 2| = \ln|4x^2 + 3x - 7|$

c) $2^{x^2} = 3^x \cdot 3$

Exercice n°2

a) Soit f de E dans F bijective, montrer que f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) Si f de E dans F et g de F dans G sont bijectives, montrer que $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice n°3

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$$

b)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$$

c)
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

d)
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

e)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

f)
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 3}$$

Exercice n°4

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1.
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + 2}{x^2 \ln x}$$

2.
$$\lim_{x \to 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$$

3.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$$

4.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x + 2}$$

Exercice n°5

Par intégrations par parties, donner les primitives des fonctions suivantes ; on justifiera l'existence des primitives au préalable, et l'IPP sera soigneusement justifiée.

a) $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

b) $x \mapsto \arcsin x$ sur $]-1\,;1[$

c) Même question pour $x \mapsto x^2e^x$ (on procèdera à une double IPP).

Exercice n°6

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x)+1$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, E(x)+E(y) \leq E(x+y)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.

Exercice n°7

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-1}$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans un intervalle à préciser.

b) Expliciter l'application réciproque de f.

Exercice n°8

Soit $f :]-1\,;1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Étudier la dérivabilité de f et donner l'expression de sa dérivée.

Exercice n°9

Soit la fonction $f :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$.

a) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f.

c) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

d) On souhaite prolonger f par continuité : quelle valeur donner à $f(0)$?

e) Vérifier que f possède une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Exercice n°10

On définit la fonction f par $f(x) = \arctan(\tan x)$.

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Vérifier que f est périodique ; que peut-on en déduire pour son graphe ?

c) Vérifier que son graphe admet 0 comme centre de symétrie.

d) Représenter graphiquement f.

Exercice n°11

Soit x un réel quelconque.

a) Simplifier $\cos^2(\arctan x)$.

b) En déduire que $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et que $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice n°12

Calculer la dérivée de $x \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$; en déduire la simplification de cette expression.

Exercice n°13

Pour $x \in [-1\,;1]$, simplifier $\sin(\arccos x)$.

Exercice n°14

Soit la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\sin x)$ (est-ce la même expression que $\sin(\arcsin(x))$?).

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Vérifier que f est périodique. Qu'en déduit-on pour son graphe ?

c) Démontrer que l'on peut réduire l'étude de f à $[0\,;\pi]$.

d) Vérifier que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est axe de symétrie pour le graphe de f.

Exercice n°15

Simplifier : $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Exercice n°16

a) Établir que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\sin x \leq x$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

b) Développer $\cos(3a)$.

c) Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ en remarquant que $\dfrac{\pi}{4} = 2 \times \dfrac{\pi}{8}$.

d) Simplifier $\dfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$.

e) Simplifier les expressions suivantes : a) $\cos(2\arccos x)$ b) $\cos(2\arcsin x)$.

Exercice n°17
Simplifier la fonction $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ sur son intervalle de définition.

Exercice n°18
Montrer que la courbe représentative de la fonction arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice n°19
Étudier les limites à droite et à gauche en 0 de :

a) $x \mapsto E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $x \mapsto x \cdot E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $x \mapsto x^2 \cdot E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice n°20
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $|x + 4| = 5$

b) $|2x - 3| > |3 - x|$

c) $|2x - 4| = |x + 3|$

d) $|x + 1| + |x - 3| \leq 6$

Exercice n°21
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\arccos x = \arcsin(2x)$.

Exercice n°22
On pose $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est dérivable sur D, calculer sa dérivée.

c) En déduire une expression simple de f.

Exercice n°23
1) Rappeler la définition de $f = \text{sh}$ et en donner les variations.

2) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un domaine J que l'on déterminera. On note Argsh sa réciproque. Donner le tableau de variation d'Argsh et en donner les propriétés.

3) (a) Montrer que : $\forall x \in J, \text{ch}(\text{Argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}$. (b) En déduire pour $x \in J$ l'expression de $\text{Argsh}'(x)$.

4) (a) Résoudre en fonction du paramètre $y \in \mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$. (b) En déduire, pour $y \in J$, l'expression de $\text{Argsh}(y)$.