Chapitre 5 : Les complexes (2)

M. Calciano

I. Formules d'Euler, de Moivre, linéarisation

Formule d'Euler

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Application : linéariser des puissances

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, en développant avec la formule du binôme de Newton

$$\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n \qquad \text{ou} \qquad \sin^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n,$$

et en regroupant les termes deux à deux, on obtient une expression de $\cos^n\theta$ en fonction des $\cos(k\theta)$ ou des $\sin(k\theta)$ pour $0 \leq k \leq n$.

On dit qu'on a **linéarisé** l'expression.

<u>**Exercice :**</u> Linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}e^{ik\theta}e^{i(3-k)\theta} \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right) \\
&\quad \text{(il est conseillé d'utiliser le triangle de Pascal...)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}+3\,\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{4}\big(\cos(3\theta)+3\cos\theta\big).
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}e^{ik\theta}(-1)^k e^{i(3-k)\theta} \\
&= \frac{-1}{8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}-e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}-3\,\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) = \frac{-1}{4}\big(\sin 3\theta-3\sin\theta\big).
\end{aligned}$$

Techniques annexes

Pour linéariser $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$, on remplace $\cos\theta$ par $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta$ par $\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, puis on développe.

Technique de l'arc-moitié. On peut factoriser une expression du type $e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}$ par $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$.

Exemple. Soient p et q deux nombres réels ; factoriser $e^{ip}+e^{iq}$.

$$e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)=2\,e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Formule de Moivre

Pour $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$, on a $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$, soit :

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta).$$

Démonstration. *Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, et passage à l'inverse pour n négatif.*

Exercice : Calculer $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3000}$.

On a :

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3000}=\left(e^{i\pi/3}\right)^{3000}=e^{1000i\pi}=(-1)^{1000}=1.$$

Application de la formule de Moivre

Exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ ou $\sin\theta$.

Exemple. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos^3\theta$, $\sin^3\theta$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta)&=\operatorname{Re}\left(e^{3i\theta}\right)=\operatorname{Re}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^3\right]\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\\ \sin(3\theta)&=\operatorname{Im}\left(e^{3i\theta}\right)=\operatorname{Im}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^3\right]\\&=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.\end{aligned}$$

II. Racines n-ièmes de l'unité

Définition

Si z désigne un nombre complexe, on appelle **racine n-ième de z** tout complexe Z tel que $Z^n = z$.

Les racines n-ièmes de 1 sont également appelées **racines n-ièmes de l'unité**. L'ensemble de ces racines est noté $\mathcal{U}_n$.

Proposition

Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité, qui sont les complexes

$$\omega_k = e^{2ik\pi/n}, \quad k \in [\![0;\, n-1]\!].$$

Démonstration. *Les solutions sont clairement de module* 1.

L'ensemble des racines n-ièmes de 1 *est de la forme* $\left\{e^{2ik\pi/n},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ *(il suffit de revenir à l'écriture exponentielle).*

Montrons que $\left\{e^{2ik\pi/n},\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\omega_k = e^{2ik\pi/n},\ k \in [\![0; n-1]\!]\right\}$. *Posons* $q = \lfloor k/n \rfloor$ *et* $r = k - nq$. *Par définition,* $q \leq k/n < q+1$ *et* $0 \leq r < n$, *et* $e^{2i(r+nq)\pi/n} = e^{2ir\pi/n}$, *ce qui établit l'inclusion.*

Vérifions enfin que deux racines d'indices distincts dans $[\![0; n-1]\!]$ *sont bien distinctes. On a* $e^{2ik\pi/n} = e^{2ir\pi/n}$ *si et seulement si* $k - r = nq$ *pour un certain entier* q. *Comme* k *et* r *appartiennent à* $[\![0; n-1]\!]$, *on a* $|k-r| < n$, *donc nécessairement* $q = 0$, *c'est-à-dire* $k = r$.

Proposition

Soit $n \geq 2$ un entier. Si ω est une racine n-ième de l'unité différente de 1, alors :

$$1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$

La somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.

Démonstration. *Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison* $\omega \neq 1$ *et de premier terme* 1 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0.$

Proposition

Soit z un complexe. Si Z_0 est une racine n-ième de z, alors l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de z est :

$$\left\{Z_0\,\omega \mid \omega \in \mathcal{U}_n\right\}.$$

Démonstration. *Pour* $z = 0$, *c'est évident. Sinon, l'équation* $Z^n = z$ *s'écrit également* $Z^n = Z_0^n$. *Comme* $Z_0 \neq 0$, *cela équivaut à* $\left(\dfrac{Z}{Z_0}\right)^n = 1$, *soit* $\dfrac{Z}{Z_0} = \omega_k$ *pour un certain* $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Corollaire

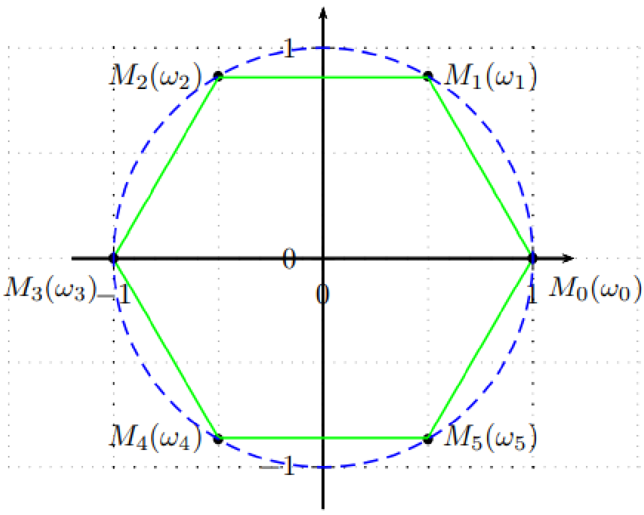
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$ de module r et d'argument θ. Le complexe z admet exactement n racines n-ièmes, qui sont les complexes :

$$Z_k = r^{1/n}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k \in [\![0;\, n-1]\!].$$

Démonstration. *On applique la proposition précédente avec* $Z_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}$.

Interprétation géométrique des racines n-ièmes de l'unité

Les n racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité, dont l'un des sommets est 1.



III. Exercices

<u>Exercice n°1</u>

Linéariser $\sin^4 x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice n°2</u>

Calculer les racines quatrièmes de $28 - 96i$.

<u>Exercice n°3</u>

Soient α et β deux réels. Mettre sous forme algébrique :

$$A = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{50} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1+\cos\beta + i\sin\beta}.$$

Exercice n°4

Soit n un entier non nul.

1. Déterminer le module et un argument de $(1+i)^n$.
2. En déduire $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$.
3. Et $S' = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$.

Exercice n°5

Soit n un entier non nul, et $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.

1. Calculer $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que, si $n \geq 3$, $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k,\ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} \xi_k \overline{\xi_\ell} = 0$.

Exercice n°6

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \ell\pi$, simplifier $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\cos^k x$.

Exercice n°7

https://youtu.be/nHkn0ifpLMQ

Soit n un entier non nul. Calculer le produit des racines n-ièmes de 1.

Exercice n°8

Pour $n \in \mathbb{N}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n+1} + 1 = 0$.

Exercice n°9

1. Résoudre de deux façons l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.
2. En déduire la valeur de $\tan \dfrac{\pi}{5}$.

Exercice n°10

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$.
2. En déduire une expression de $\cos \dfrac{\pi}{10}$.

Exercice n°11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$,
2. $(z+1)^n = (1-z)^n$.

Exercice n°12

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta \, \sin^{2p}\theta$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-2p-1}\theta \, \sin^{2p+1}\theta.$$

2. On suppose $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + \ell\pi$ et $n\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + \ell\pi$. En déduire une expression de $\tan(n\theta)$ en fonction de $\tan\theta$ et n.

Exercice n°13

Soit $n \geq 2$ un entier, et $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$ en fonction de n.