Chapitre 6 : Equations différentielles du premier ordre à coefficients constants

M. Calciano

I. Généralités

Une équation est dite différentielle lorsqu'il s'agit d'une équation faisant intervenir les dérivées d'une fonction « y » à déterminer.
Elle est dite du premier ordre lorsque parmi les dérivées, seule la dérivée première intervient.

Dans tout le chapitre, on désigne par K, le corps des réels ou des complexes.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $b : I \to K$ une application continue, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $J \subset I$, et $y : J \to K$ une application.
On dit que y est solution sur J de l'équation différentielle (E) du premier ordre :

$$y' + ay = b$$

si et seulement si y est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \quad y'(x) + ay(x) = b(x).$$

Lorsque l'application a est constante comme ici, on parle d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

À chaque équation (E), on peut associer une équation (E_0) dite équation homogène à (E) définie par :

$$y' + ay = 0.$$

Résoudre (E), c'est déterminer pour chaque intervalle $J \subset I$, l'ensemble des solutions de (E) sur J.

II. Résolution

1) Résolution de (E_0)

Soit S_0 l'ensemble des solutions de E_0 sur I, alors

$$S_0 = \left\{ I \to K,\ x \mapsto \lambda e^{-ax}\ ;\ \lambda \in K \right\}.$$

Démonstration : Puisque a est constante, a admet des primitives dont l'expression est $ax +$ cste.
Pour $y : I \to K$ dérivable, on définit z par $z(x) = e^{ax} y(x)$ (clairement z est dérivable).
Pour tout x de I :

$$y'(x) = -ae^{-ax} z(x) + e^{-ax} z'(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y \in S_0 &\iff \forall x \in I,\ y'(x) + ay(x) = 0 \\ &\iff -ae^{-ax} z(x) + e^{-ax} z'(x) + ae^{-ax} z(x) = 0 \\ &\iff e^{-ax} z'(x) = 0 \iff z' = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in K,\ \forall x \in I,\ z(x) = \lambda. \end{aligned}$$

Finalement :

$$S_0 = \left\{ I \to K,\ x \mapsto \lambda e^{-ax}\ ;\ \lambda \in K \right\}.$$

Exercice n°1 : Résoudre $y' - 4y = 0$.
Il s'agit d'une équation différentielle homogène du premier ordre à coefficient constant dont les solutions sont : $y(x) = \lambda e^{4x}$ avec $\lambda \in K$.

Remarque : La démonstration précédente reste valable avec a non constante, et alors :

$$S_0 = \left\{ I \to K,\ x \mapsto \lambda e^{-\int a(x)dx}\ ;\ \lambda \in K \right\}.$$

Que penser de la résolution : $y' = ay \iff \frac{dy}{dt} = ay$ *?*
Donc $\frac{dy}{y} = adt$ *et* $\ln(y) = at + cste$*, soit* $y = e^{at+cste} = Ae^{at}$*. Alors...*
On divise par y sans s'assurer que y pourrait s'annuler.
On intègre en $\ln(y)$ *alors qu'il s'agit de* $\ln|y|$*. Enfin, la constante A devrait être strictement positive...*

2) Résolution « théorique » de (E)

a) Lien entre (E) et (E_0) :

$$\forall y_1, y_2 \in S, \quad y_1 - y_2 \in S_0.$$

Démonstration : On a $y_1' + ay_1 = b$ *et* $y_2' + ay_2 = b$*, donc* $y_1' - y_2' + ay_1 - ay_2 = b - b = 0$.

b)

$$\forall y_1 \in S,\ \forall y_0 \in S_0, \quad y_1 + y_0 \in S.$$

Ainsi, si S n'est pas vide, alors S est une droite affine dont la direction est la droite vectorielle S_0 :

$$S = \{y_1 + y_0 \mid y_0 \in S_0\}.$$

Autrement dit : la « solution générale » de (E) est la somme d'une « solution particulière » de (E) et de la « solution générale » de (E_0).

Démonstration : de la même façon qu'au a).

Conséquence importante : Pour résoudre notre équation différentielle, il suffira de résoudre l'équation différentielle linéaire associée puis de déterminer une solution particulière.

c) Superposition des solutions

On résout d'abord (E_0) puis on détermine une solution particulière de (E). Pour l'obtention de la solution particulière de (E), il se peut que la solution soit « évidente ».
Il se peut aussi que le second membre b se décompose en une combinaison linéaire de plusieurs fonctions : $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$.
On détermine alors une solution particulière pour chaque équation (E_k) : y_k, puis $\sum_{k=1}^{n} y_k$ fournit une solution particulière de (E). En effet :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)' + a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (y_k' + ay_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k = b.$$

Ce principe est appelé le **principe de superposition des solutions**.

3) Avec des seconds membres particuliers...

a) Second membre de la forme $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$

On peut chercher une solution de même type que le second membre, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ avec Q une fonction polynomiale.

Exercice n°2 : Résoudre l'équation $(E_1) : y' + 2y = e^{2x} + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' + y = x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.
Pour (E_1), on va utiliser le principe de superposition des solutions.
- On résout d'abord l'équation homogène associée : $y' + 2y = 0$ qui a pour solution $y(x) = \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- On cherche une solution particulière de $(E_1') : y' + 2y = e^{2x}$. Une solution particulière y_0 est de la forme $y_0(x) = P(x)e^{2x}$. De $y_0' + 2y_0 = e^{2x} \iff P'(x)e^{2x} + 2P(x)e^{2x} + 2P(x)e^{2x} = e^{2x}$, soit $P'(x) + 4P(x) = 1$. P est donc de degré 0, c'est une constante et $P(x) = \frac{1}{4}$. D'où $y_0(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$.
- On cherche une solution particulière de $(E_1'') : y' + 2y = e^{-x}$. $y_0(x) = P(x)e^{-x}$. De $y_0' + 2y_0 = e^{-x} \iff P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + 2P(x)e^{-x} = e^{-x}$, soit $P'(x) + P(x) = 1$. P est constant, $P(x) = 1$. D'où $y_0(x) = e^{-x}$.
- Finalement, les solutions de (E_1) :

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + e^{-x} + \lambda e^{-2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour $(E_2) : y' + y = x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- Équation homogène : $y' + y = 0$ donne $y(x) = \lambda e^{-x}$.
- Solution particulière : $y_0(x) = P(x)e^x$. On a $y_0' + y_0 = x^2 e^x \iff P'(x)e^x + P(x)e^x + P(x)e^x = x^2 e^x$, soit $P'(x) + 2P(x) = x^2$. P est de degré 2 : $P(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$. Par identification :

$$\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{cases}$$

D'où $y_0(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$.
Finalement :

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Second membre avec des fonctions circulaires

Étude d'un exemple : résoudre $y' + y = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Première possibilité : On cherche une solution particulière de la forme $A\cos + B\sin$ avec A, B réels.
- Équation homogène : $y' + y = 0$ donne $y = \lambda e^{-x}$.
- Solution particulière : $y_0(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Alors $y_0' + y_0 = -A\sin(x) + B\cos(x) + A\cos(x) + B\sin(x) = (B - A)\sin(x) + (A + B - 1)\cos(x) = 0$. Pour $x = 0$: $A + B - 1 = 0$, pour $x = \pi/2$: $B - A = 0$, d'où $A = B = 1/2$. Donc $y_0(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$.
Finalement : $y(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + \lambda e^{-x}$.

Deuxième possibilité : on bascule en complexe. On résout $y' + y = e^{ix}$ et on conserve la partie réelle.
- Équation homogène : $y = \lambda e^{-x}$.
- Solution particulière : $y_0(x) = P(x)e^{ix}$ avec P polynôme complexe. On a $P'(x)e^{ix} + iP(x)e^{ix} + P(x)e^{ix} = e^{ix} \iff P'(x) + (1+i)P(x) = 1$. Donc P est constant : $P(x) = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. D'où $y_0(x) = \frac{1-i}{2}e^{ix}$.

Les solutions complexes : $y(x) = \frac{1-i}{2}e^{ix} + \lambda e^{-x} = \frac{1-i}{2}(\cos x + i\sin x) + \lambda e^{-x} = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{i}{2}(\sin x - \cos x) + \lambda e^{-x}$.
En prenant la partie réelle, on retrouve $y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \lambda e^{-x}$.

c) Méthode de variation de la constante

En notant y_0 une solution non nulle de (E_0), la méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution y de (E) sous la forme $y = \lambda y_0$ où λ est une nouvelle fonction inconnue (dérivable sur I, $I \to K$). On a :

$$y' + ay = b \iff \lambda' y_0 + \lambda y_0' + a\lambda y_0 = b \iff \lambda' y_0 = b.$$

On en déduit λ par primitivation.

Exemple : Résoudre $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$.
L'équation homogène associée a pour solution Ae^{-x}. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = A(x)e^{-x}$. On obtient $A'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}$, soit $A'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et $A(x) = \ln(1+e^x)$.
D'où :

$$y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x} + Ae^{-x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

III. Illustration en physique

1) Les équations rencontrées en Physique :

a) Échange thermique : $\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$.
b) Charge/décharge d'un condensateur à travers une résistance : $U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$.
c) Chute libre d'un corps : $m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - mg$.
d) Réaction chimique : $\frac{dC}{dt} = -kC$.

2) Étude d'une équation avec second membre de type sinusoïdal

Résoudre : $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$.
Méthode : voir exercices.
Remarque : La solution particulière $\frac{A_0}{1+w^2\tau^2}(\cos(wt) + w\tau\sin(wt))$ peut s'écrire sous la forme d'un cosinus « déphasé » :

$$\frac{A_0}{\sqrt{1+w^2\tau^2}}\cos(wt - \varphi), \quad \varphi = \arctan(w\tau).$$

IV. Exercices

Exercice n°1

a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + 2y = -4$.
b) Déterminer celle(s) vérifiant $y(1) = -3$.
a) Déterminer les solutions de $2y' - 3y = 9$.
b) Déterminer celle(s) vérifiant $y'(1) = 1$.
3) De façon générale, l'équation différentielle $y' + ay = b$ avec a constante et b fonction continue sur $\mathbb{R}$, a combien de solutions vérifiant la condition fixée $y(x_0) = y_0$?

Exercice n°2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
3. $y' + y = xe^{-x}$
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$

Exercice n°3 Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ de deux façons différentes.

Exercice n°4 (autocorrection) Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $2y' - y = \cos(2x)$
2. $-y' + 4y = 3e^{2x} + xe^{-x}$
3. $y' = 2y + (2x^2 - 1)e^{x^2}$

On obtient :

1. $y = -\frac{1}{17}\cos(2x) + \frac{4}{17}\sin(2x) + Ae^{2x},\ A \in \mathbb{R}$
2. $y = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{10}\right)e^{-x} + \frac{3}{2}e^{2x} + Ae^{4x},\ A \in \mathbb{R}$
3. $y = (x+1)e^{x^2} + Ae^{2x},\ A \in \mathbb{R}$

Exercice n°5 L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice n°6 La variation de la température θ d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton : $\theta'(t) = \lambda(\theta_a - \theta(t))$, où θ_a est la température ambiante, λ une constante de proportionnalité, et t le temps en minutes.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle en fonction de λ et θ_a.
2. Un verre d'eau à 10°C est sorti du réfrigérateur et déposé dans une pièce à 31°C. Après 10 minutes, l'eau est à 17°C. Quel temps écoulé après la sortie pour que l'eau soit à 25°C ?

Exercice n°7 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(-x) = 1$ et $f(0) = -4$.
Indication : on posera $g(x) = f(x)f(-x)$.

Exercices n°8 : Les équations de la physique...

1. Échange thermique : résoudre $\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$.
2. Charge/décharge d'un condensateur : résoudre $U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$.
3. Chute libre d'un corps : résoudre $m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - mg$.
4. Réaction chimique : résoudre $\frac{dC}{dt} = -kC$.

Exercice n°9 Résoudre $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$. On bascule en complexes : $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$.
3. En déduire les solutions de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0}{\tau}e^{iwt}$.
4. Déterminer les solutions de $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A_0\cos(wt)}{\tau}$.

Exercice n°10

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + xy = x^3$ sur $]0; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation différentielle $xy' + xy = x^3$ sur $]-\infty; 0[$.
3. Peut-on résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$?

Solutions :

1. $y = x^2 - 2x + 2 + Ae^{-x},\ A \in \mathbb{R}$
2. $y = x^2 - 2x + 2 + Be^{-x},\ B \in \mathbb{R}$
3. Oui, $y = x^2 - 2x + 2 + Ae^{-x},\ A \in \mathbb{R}$