Chapitre 7 - Équations différentielles linéaires (2)

M. Calciano

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

I.1. Généralités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : I \to \mathbb{K}$ des applications continues, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $J \subset I$, et $y : J \to \mathbb{K}$ une application.

On dit que y est **solution sur** J de l'équation différentielle (E) du premier ordre :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

si et seulement si y est dérivable sur J et : $\forall x \in J, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.

Il arrive que l'on ait à résoudre des équations de la forme :

$$\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$$

où α, β, γ sont continues sur I. Dans ce cas, on se place sur un intervalle $I' \subset I$ sur lequel α ne s'annule pas, et on se ramène à une équation de la forme $y' + ay = b$ avec $a = \beta/\alpha$, $b = \gamma/\alpha$.

À chaque équation (E), on associe l'**équation homogène** (E_0) : $y' + a(x)y = 0$.

Résoudre (E), c'est déterminer, pour chaque intervalle $J \subset I$, l'ensemble des solutions de (E) sur J.

Proposition (structure des solutions)

L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (f_1, f_2) \in S_0^2, \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2, \quad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in S_0.$$

Démonstration. Reprendre la démonstration du premier chapitre sur les équations différentielles. □

Proposition

Si f_1 est une solution de (E) et si S_0 désigne l'ensemble des solutions de (E_0), alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{f_1 + g \mid g \in S_0\}.$$

Remarque. Comme $f_1 + S_0 = S$, cet ensemble ne dépend pas du choix de f_1.

Démonstration. Reprendre la démonstration du premier chapitre sur les équations différentielles. □

I.2. Résolution

Le plan de résolution est le même que pour les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

Résolution de l'équation homogène

Soit S_0 l'ensemble des solutions de (E_0) sur I. Alors :

$$S_0 = \left\{ x \mapsto \lambda\, e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Remarque. On verra que S_0 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration. Soit $A(x)$ une primitive de $x \mapsto a(x)$. On pose $g(x) = f(x)e^{A(x)}$, clairement dérivable sur I. On a :

$$g'(x) = f'(x)e^{A(x)} + A'(x)f(x)e^{A(x)} = \big(f'(x) + a(x)f(x)\big)e^{A(x)}.$$

Ainsi, f est solution de (E_0) si et seulement si $g'(x) = 0$, c'est-à-dire si g est constante sur I. □

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + \dfrac{1}{1+x^2}\,y = 0$.

On obtient $y = \lambda\, e^{-\arctan(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition

Si f_0 est une solution non nulle de (E_0), alors elle ne s'annule pas sur I et :

$$S_0 = \{\alpha f_0 \mid \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Démonstration. Si f_0 est solution de (E_0), il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f_0(x) = \lambda_0\, e^{-\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t}$. Si f_0 s'annule une fois, alors $\lambda_0 = 0$ et f_0 est la fonction nulle. Si f_0 ne s'annule pas sur I, alors f et f_0 sont proportionnelles. □

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: $y' + \dfrac{1}{x}\,y = 0$.

On obtient directement $y(x) = \lambda\, e^{-\ln(x)} = \dfrac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

I.3. Solution particulière

Second membre de la forme $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$

On peut chercher une solution de même type que le second membre, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ avec Q polynomiale.

Exemple. Résoudre $y' + xy = x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$.

— **Équation homogène** : $y' + xy = 0$ donne $\mathbf{y = \lambda e^{-\frac{1}{2}x^2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

— **Solution particulière** : on cherche $y_0(x) = P(x)e^x$ avec P polynôme réel.
y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow P'(x)e^x + P(x)e^x + xP(x)e^x = x^2e^x$, soit $P'(x) + (1+x)P(x) = x^2$.
P est de degré 1 : on pose $P(x) = ax + b$. En identifiant :

$$a + (1+x)(ax+b) = x^2 \implies ax^2 + (a+b)x + (a+b) = x^2,$$

d'où $a = 1$, $b = -1$, soit $P(x) = x - 1$ et $\mathbf{y_0(x) = (x-1)e^x}$.

Les solutions de (E) sont : $\mathbf{y(x) = (x-1)e^x + \lambda e^{-\frac{1}{2}x^2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Second membre avec des fonctions circulaires

Pour un second membre comportant des cosinus et des sinus, on peut :

— Chercher une solution particulière de la forme $A\cos(\cdot) + B\sin(\cdot)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$;

— Ou basculer en complexes : résoudre $y' + y = e^{ix}$ puis conserver la partie réelle.

Superposition des solutions et méthode de la variation de la constante

On reprend les méthodes du chapitre précédent.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: $xy' + y = 1 + (1+x)e^x$.

— **Équation homogène** : $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ donne $\mathbf{y(x) = \dfrac{\lambda}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

— **Solution particulière de** $xy' + y = 1$: une solution évidente est $\mathbf{y_0 = 1}$.

— **Solution particulière de** $xy' + y = (1+x)e^x$: on cherche $y_1(x) = P(x)e^x$ avec P polynôme réel.
On trouve $P(x) = 1$, soit $\mathbf{y_1(x) = e^x}$.

Finalement, les solutions de (E) sont : $\mathbf{y(x) = e^x + 1 + \dfrac{\lambda}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple. Résoudre sur $]1; +\infty[$: $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{x-1}$.

— **Équation homogène** : $\mathbf{y(x) = \dfrac{\lambda}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

— **Variation de la constante** : on cherche $y_0(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x}$.
On obtient $\lambda'(x) = \dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, d'où :

$$\lambda(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1).$$

Ainsi $y_0(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{\ln(x-1)}{x}$.

Les solutions de (E) sont : $\mathbf{y(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{\ln(x-1)}{x} + \dfrac{\lambda}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

En résumé

On résout d'abord (E_0) puis on détermine une solution particulière de (E) : on peut chercher une solution « évidente » dont la forme est proche du second membre, décomposer le second membre et utiliser le principe de superposition, ou encore utiliser la **variation de la constante**.

I.4. Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est une équation différentielle associée à une condition initiale.

Théorème de Cauchy

Pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration. y est de la forme $y(x) = f_1(x) + \lambda f_0(x)$ avec f_1 solution particulière de (E) et f_0 solution non nulle de (E_0). Or $y(x_0) = f_1(x_0) + \lambda f_0(x_0)$; comme f_0 ne s'annule pas sur I, on a :

$$\lambda = \frac{y_0 - f_1(x_0)}{f_0(x_0)},$$

et l'unicité en découle. □

Exemple. Déterminer l'unique solution sur $]0; \pi[$ de $y' + \frac{\cos x}{\sin x} y = 1$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

— **Équation homogène** : $y(x) = \frac{\lambda}{\sin(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

— **Variation de la constante** : $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{\sin(x)}$. On trouve $\lambda'(x) = \sin(x)$, soit $\lambda(x) = -\cos(x)$, d'où $\mathbf{y_0(x)} = -\frac{\cos(\mathbf{x})}{\sin(\mathbf{x})}$.

— **Solutions générales** : $y(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\lambda}{\sin(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

— **Condition initiale** : $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda = 0$, donc $\mathbf{y(x)} = -\frac{\cos(\mathbf{x})}{\sin(\mathbf{x})}$.

Conséquences du théorème de Cauchy

Si f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, alors f s'annule si et seulement si elle est identiquement nulle.

Les graphes de deux solutions d'une même équation différentielle linéaire d'ordre 1 sont donc disjoints ou confondus.

Une application importante : l'étude de parité d'une solution

<u>**Exercice n°1**</u>

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0, a et b des fonctions continues sur I et impaires. Montrer que toute solution de $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ est paire.

II. Exercices sur les équations différentielles du premier ordre

<u>**Exercice n°1**</u>

Résoudre les équations homogènes suivantes :

a) $y' + \cos(x)\, y = 0$ sur $\mathbb{R}$

b) $(1 + x^2)y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$

<u>**Exercice n°2**</u>

Soient a et b deux fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$, et $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.

1) Montrer que si y est solution de (E), alors z définie par $z(x) = y(x+T)$ est aussi solution.

2) Montrer qu'une solution y de (E) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.

Exercice n°3

Résoudre les équations différentielles sur des intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

a) $(x\ln x)y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln(x)+1)$

b) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$

c) $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$

Exercice n°4 *(autocorrection)*

Résoudre les équations différentielles sur des intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

a) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$

b) $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$

c) $2xy' + y = x^n$ où n est un entier naturel.

On obtient :

— Pour a) : $y = \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x} + Ae^{-x}$ avec $A \in \mathbb{R}$

— Pour b) : sur $]0,\pi[$, $y = \cos(x) + A\sin(x)$ avec $A \in \mathbb{R}$

— Pour c) : sur $]0,+\infty[$, pour $n = 0$: $y = 1 + \dfrac{A}{\sqrt{x}}$; pour $n > 0$: $y = \dfrac{x^n}{2n+1} + \dfrac{A}{\sqrt{x}}$ avec $A \in \mathbb{R}$

Exercice n°5

Trouver toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice n°6

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0, a et b des fonctions continues sur I et impaires. Montrer que toute solution de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ est paire.

Exercice n°7

Résoudre sur $]-1;+\infty[$, l'équation différentielle $(x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0$ avec $y(0) = 2$.

Exercice n°8

Résoudre sur $]0;+\infty[$, l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = \arctan(x)$.

Exercice n°9

On considère l'équation différentielle (E) : $ty' - 2y = t^3$.

1) Résoudre (E) sur $]-\infty,0[$.
2) Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$.
3) Déterminer la solution y_0 de (E) admettant une limite en 0.
4) En étudiant le taux d'accroissement $\dfrac{y_0(x)-y_0(0)}{x}$, pour $x > 0$ et $x < 0$, étudier la dérivabilité de y_0.
5) Peut-on trouver une solution de (E) sur $\mathbb{R}$? (problème de raccord)

Exercice n°10 *(oraux de concours)*

Déterminer toutes les fonctions f continues vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Bonus (beaucoup plus difficile). Déterminer toutes les fonctions f continues vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x f(x-t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice n°11

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant $y(0) = z(0) = 1$. De plus, y vérifie $y' \geq ay$ et z vérifie $z' = az$. On souhaite montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $y(t) \geq z(t)$.

1) À l'aide de l'unicité au problème de Cauchy, justifier que z ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$ (*ind.* : la fonction nulle est solution de l'équation).
2) Supposer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $z(\alpha) < 0$ et, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, aboutir à une contradiction avec 1).
3) On suppose d'après la question 2) que $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) > 0$. On considère $f(t) = \dfrac{y(t)}{z(t)}$.
   a) Déterminer $f'(t)$.
   b) Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) \geq 0$.
   c) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \geq 1$, et conclure.

III. Équations différentielles linéaires du second ordre

III.1. Positionnement du problème et structure des solutions

Ici $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ continue. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = c(x).$$

On appelle **solution sur** I de (E) toute fonction f deux fois dérivable de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad f''(x) + af'(x) + bf(x) = c(x).$$

L'équation (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$ est appelée **équation homogène associée** à (E).

Proposition (structure des solutions)

L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (f_1, f_2) \in S_0^2, \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2, \quad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in S_0.$$

Remarque. S_0 a une structure de sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$ (notion étudiée ultérieurement).

Proposition

Soit f_1 une solution particulière de (E), S_0 l'ensemble des solutions de (E_0). Alors :

$$S = \{f_1 + g \mid g \in S_0\}.$$

Démonstration. Évidente. □

III.2. Équation homogène

Proposition

Soit $r \in \mathbb{K}$. La fonction $\varphi_r : x \mapsto e^{rx}$ vérifie (E_0) si et seulement si :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Cette équation est appelée **équation caractéristique de** (E_0).

Démonstration. Poser $y = e^{rx}$ et exprimer $y'' + ay' + by = 0$. □

Cas complexe

— Si l'équation caractéristique a deux racines **distinctes** $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, les solutions de (E_0) sont : $x \mapsto \alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$.

— Si l'équation caractéristique a une **racine double** $r_0 \in \mathbb{C}$, les solutions de (E_0) sont : $x \mapsto (\alpha_1 x + \alpha_2) e^{r_0 x}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$.

Remarque. S_0 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration. Soit $z(x) = y(x)e^{-rx}$ avec r racine de l'équation caractéristique et y solution. On a $y(x) = z(x)e^{rx}$, d'où :

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = \big(z''(x) + (2r+b)z'(x)\big)e^{rx}.$$

Ainsi $y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow z''(x) + (2r+b)z'(x) = 0$, soit $z'(x) = Ce^{-(2r+b)x}$, et on intègre selon le cas $2r + b \neq 0$ ou $2r + b = 0$. □

Cas réel

— **Deux racines réelles distinctes** r_1, r_2 : $y(x) = \alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

— **Racine double réelle** r_0 : $y(x) = (\alpha_1 x + \alpha_2) e^{r_0 x}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

— **Deux racines complexes conjuguées** $\alpha \pm \beta i$: $y(x) = \alpha_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \alpha_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemples. Résoudre :

• $y'' + 4y' - 5y = 0$: équation caractéristique $r^2 + 4r - 5 = 0$, $\Delta = 36$, $r = 1$ ou $r = -5$.

$$y(x) = \alpha_1 e^{x} + \alpha_2 e^{-5x}.$$

• $y'' - 2y' + y = 0$: équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$, $\Delta = 0$, $r = 1$.

$$y(x) = (\alpha_1 x + \alpha_2)e^{x}.$$

• $y'' + 2y' + 2y = 0$: équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$, $\Delta = -4$, $r = -1 \pm i$.

$$y(x) = \alpha_1 e^{-x}\cos(x) + \alpha_2 e^{-x}\sin(x).$$

III.3. Solution particulière

Principe de superposition

Soit f_1 solution de $y'' + ay' + by = c_1(x)$ et f_2 solution de $y'' + ay' + by = c_2(x)$. Alors :

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2, \quad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \text{ est solution de } y'' + ay' + by = \alpha_1 c_1(x) + \alpha_2 c_2(x).$$

Méthodes basées sur la forme du second membre

Si le second membre est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q polynôme :

— Si α n'est **pas racine** de l'équation caractéristique, on cherche $y_0(x) = R(x)e^{\alpha x}$ avec $\deg R = \deg Q$.

— Si α est **racine simple** de l'équation caractéristique, on cherche $y_0(x) = xR(x)e^{\alpha x}$.

— Si α est **racine double** de l'équation caractéristique, on cherche $y_0(x) = x^2R(x)e^{\alpha x}$.

Exemple. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^x$.

Équation homogène : $r^2 - 4r + 3 = 0$, $r = 1$ ou $r = 3$, donc $y_h = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{3x}$.

$\alpha = 1$ est racine simple : on cherche $y_0(x) = (ax + b)e^x$. $y_0'' - 4y_0' + 3y_0 = e^x \Leftrightarrow -2a = 1$, soit $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$.

Finalement :

$$y(x) = -\tfrac{x}{2}e^x + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{3x}.$$

Pour un second membre trigonométrique, on linéarise ou on emploie les exponentielles complexes.

Exemples. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{sh}(x)$ et $y'' + y = \sin^3(x)$.

Pour $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$**.**

Équation homogène : $y_h = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{3x}$.

— 1 racine simple : on résout $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{e^x}{2}$ avec $y_0(x) = (ax + b)e^x$. On obtient $-2a = \dfrac{1}{2}$, soit $y_0(x) = -\dfrac{x}{4}e^x$.

— -1 non racine : on résout $y'' - 4y' + 3y = -\dfrac{e^{-x}}{2}$ avec $y_1(x) = Ce^{-x}$. On obtient $8C = -\dfrac{1}{2}$, soit $C = -\dfrac{1}{16}$ et $y_1(x) = -\dfrac{1}{16}e^{-x}$.

Par superposition :

$$y(x) = -\tfrac{x}{4}e^x - \tfrac{1}{16}e^{-x} + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{3x}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour $y'' + y = \sin^3(x)$**.**

On linéarise : $\sin^3(x) = \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{1}{4}\sin(3x)$.

Équation homogène (E_0) : $y_h = A\cos(x) + B\sin(x)$.

On cherche une solution particulière de $y'' + y = -\dfrac{1}{4}\sin(3x)$ (non-résonance en 3) et de $y'' + y = \dfrac{3}{4}\sin(x)$ (résonance en 1, on bascule en complexes).

Finalement :

$$y = \tfrac{1}{32}\sin(3x) - \tfrac{3}{8}x\cos(x) + A\cos(x) + B\sin(x), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Méthode de variation des constantes

Si les solutions de (E_0) sont de la forme $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, on cherche une solution particulière sous la forme $\alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x)$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} \alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x) = 0 \\ \alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x) = c(x) \end{cases}$$

où $c(x)$ désigne le second membre.

Démonstration. Par réinjection dans l'équation différentielle. □

III.4. Problème de Cauchy

Théorème

Pour toute condition initiale $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution f de (E) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Démonstration. Les solutions de (E_0) s'écrivent $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$. Si f_1 est solution particulière, toute solution f de (E) s'écrit $f_1(x) + \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$. Les conditions initiales donnent un système 2×2 en (α_1, α_2) dont le déterminant (wronskien) $y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$ est non nul, ce qui assure l'existence et l'unicité. □

III.5. Illustration en physique

Oscillations d'un pendule libre sans frottements

Les oscillations d'un pendule donnent l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

L'équation caractéristique $r^2 + \frac{g}{\ell} = 0$ a pour racines $r = \pm i\sqrt{g/\ell}$, d'où :

$$\theta(t) = \alpha_1 \cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{\ell}}\, t\right) + \alpha_2 \sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{\ell}}\, t\right), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Charge d'un condensateur (circuit RLC)

On a : $L\dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{C} = U$.

On introduit le coefficient d'amortissement $\lambda = \dfrac{R}{2L}$ et la pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Une solution particulière évidente est $y = U_C = UC$.

L'équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ donne $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.

— $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$ **(régime apériodique) :**

$$y(t) = UC + \alpha_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})\, t} + \alpha_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})\, t}.$$

— $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$ **(régime critique) :**

$$y(t) = UC + (\alpha_1 t + \alpha_2)e^{-\lambda t}.$$

— $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ **(régime pseudo-périodique) :**

$$y(t) = UC + \alpha_1 e^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t\right) + \alpha_2 e^{-\lambda t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t\right).$$

IV. Feuille d'exercices (équations du second ordre)

Exercice n°1
Résoudre les équations suivantes :

a) $y'' + 3y' + 2y = e^x$
b) $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}$
c) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$
d) $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$

Exercice n°2

1) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^2y''(x)+3xy'(x)+y(x) = (x+1)^2$, en effectuant le changement de variable $t = \ln x$ (i.e. en posant $z(t) = y(e^t)$).
2) Résoudre sur $]-1,1[$: $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ (poser $x = \sin t$).

Exercice n°3
On considère (E) : $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ sur $]0,+\infty[$. En posant $z(x) = xy(x)$, résoudre (E).

Exercice n°4
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\alpha - x). \tag{$*$}$$

1) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant $(*)$.

Exercice n°5
On souhaite trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, non nulles et deux fois dérivables, telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1) Montrer que $f(0) = 1$.
2) Montrer que f est paire.
3) En déduire que $f'(0) = 0$.
4) En dérivant deux fois par rapport à y, déterminer une condition nécessaire sur f. On posera $\omega^2 = f''(0)$ (on aboutira à un problème de Cauchy).
5) Conclure en étudiant la réciproque.

Exercice n°6
Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $y'' + y = 2\cos^3(x)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

Première année classe préparatoire INP des Hauts-de-France, lycée Fénelon Cambrai, M. Calciano