

# Chapitre 8 : Algèbre générale

M. Calciano

## I. Relation dans un ensemble

### 1) Définition

Une **relation**  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $\mathbf{E}$  est une propriété pour certains couples  $(x, y)$  de  $E^2$  et fausse pour d'autres.

Lorsque le couple  $(x, y)$  vérifie la relation  $\mathcal{R}$ , on note  $x\mathcal{R}y$ .

— *Exemples :*

— La relation  $\leq$  sur  $\mathbb{R}$ .

— La relation de divisibilité sur  $\mathbb{Z}$ ,  $m\mathcal{R}n \iff m$  divise  $n$ .

### 2) Autres définitions

— Une relation  $\mathcal{R}$  est « **réflexive** » si pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x\mathcal{R}x$ .

— Une relation  $\mathcal{R}$  est « **symétrique** », si pour tout  $x, y$  de  $E$ ,  $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ .

— Une relation  $\mathcal{R}$  est « **transitive** » si pour tout  $x, y, z$  de  $E$ ,  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ .

— Une relation  $\mathcal{R}$  est « **antisymétrique** » si pour tout  $x, y$  de  $E$ ,  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x \implies x = y$ .

*Remarque :* L'antisymétrie n'est pas l'inverse de la symétrie! Et une relation peut être symétrique et antisymétrique (par exemple la relation  $=$ ).

### 3) Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence sur un ensemble  $\mathbf{E}$** , toute relation réflexive, symétrique et transitive.

### 4) Classe d'équivalence

Soit  $\mathcal{R}$ , une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ , et  $x \in E$ . On appelle **classe d'équivalence, notée  $cl(x)$** , le sous-ensemble de  $E$  constitué des éléments en relation avec  $x$ .

Ainsi :

$$cl(x) = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}$$

*Remarque n°1 :* Soit  $(x, y) \in E^2$ , muni d'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ . Alors, soit  $y \in cl(x)$  et  $cl(x) = cl(y)$ , soit  $x$  n'est pas en relation avec  $y$  et  $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$ .

— *Exemple :* On définit sur  $\mathbb{Z}$  la relation de congruence : les entiers  $x$  et  $y$  sont congrus modulo  $n$  (entier non nul) si leur différence est un multiple de  $n$  :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = y + kn.$$

Dans ce cas, on note :  $x \equiv y [n]$ . Ainsi  $19 \equiv 4 [5]$ , mais aussi  $19 \equiv 9 [5]$ , et une infinité d'autres possibilités!

*Remarque n°2 :* L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle **l'ensemble quotient de  $\mathbf{E}$  par  $\mathcal{R}$** , et se note  $E/\mathcal{R}$ .

## II. Relation d'un ensemble vers un autre ensemble

### 1) Définition

Une application  $f$  est définie par :

- un ensemble de départ ou de définition  $E$ ,
- un ensemble d'arrivée  $F$ ,
- la donnée pour tout  $x$  de  $E$ , d'un unique élément de  $F$  noté  $f(x)$  appelé image de  $x$  par  $f$ .

On parle d'**application** (ou de fonction) de  $E$  dans  $F$ . On note :

$$f: E \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x).$$

### 2) Notation

L'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  est noté  $F^E$ .

### 3) Définitions

- Soit  $E$  un ensemble et  $I$  un ensemble fini. On appelle **famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$**  toute application de  $I$  dans  $E$ . On note  $(x_i)_{i \in I}$ .
- Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **indicatrice de  $A$**  et note  $\mathbf{1}_A$  la fonction de  $E$  dans  $\{0; 1\}$  définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

### 4) Composée

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles,  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $g$  de  $F$  dans  $G$ . On appelle **composée de  $f$  par  $g$** , notée  $g \circ f$ , l'application de  $E$  dans  $G$  définie par :

$$g \circ f: E \rightarrow G, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

### 5) Définitions

- **Identité** : Soit  $E$  un ensemble. On appelle **application identité** de  $E$ , notée  $Id_E$ , l'application qui à tout élément  $x$  de  $E$  associe  $x$ .
- **Restriction** : Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **restriction de  $f$  à  $A$**  et on note  $f|_A$  l'application  $A \rightarrow F, x \mapsto f(x)$ .

## III. Image directe, réciproque

### 1) Définitions (Rappels)

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- Soit  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **image directe de  $A$  par  $f$** , et on note  $f(A)$ , le sous-ensemble de  $F$  défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

- Soit  $B$  une partie de  $F$ . On appelle **image réciproque de  $B$  par  $f$** , et on note  $f^{-1}(B)$ , le sous-ensemble de  $E$  défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

*Remarque :* À retenir :

- $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$ .
- $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$ .

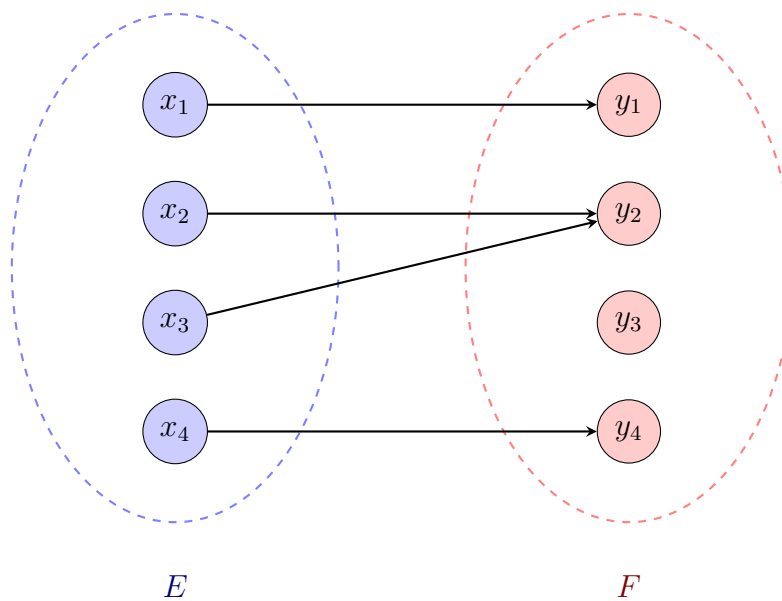
## 2) Applications injectives, surjectives, bijectives (Rappels)

- **Application injective :** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une **application injective ou une injection** lorsque tout élément de  $F$  possède au plus un antécédent par  $f$ , c'est-à-dire :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

*Remarque :* De façon équivalente,  $f$  est injective si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$



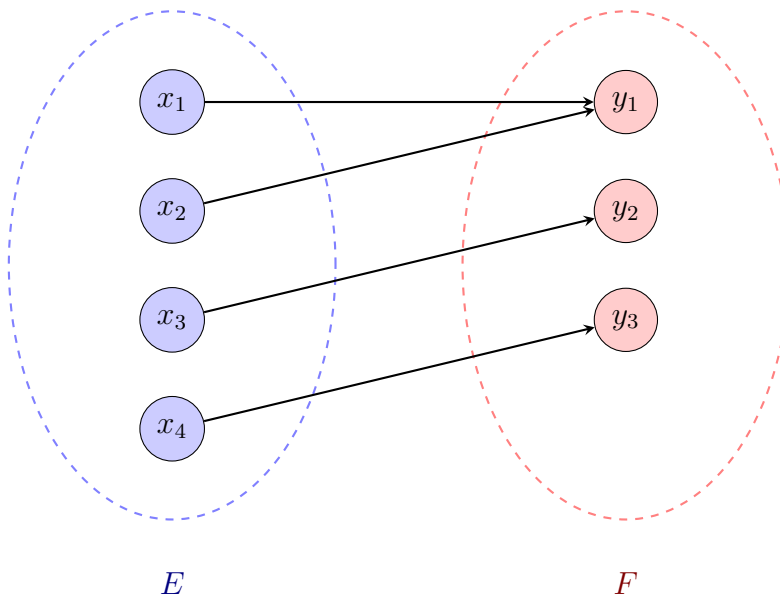
Injection : chaque élément de  $F$  a *au plus* un antécédent

*Théorème :* La composée de deux applications injectives est injective. *Démonstration :* Soient  $f$  et  $g$  deux applications définies respectivement sur  $I$  et  $J$  tels que  $f(I) \subset J$ .

Si  $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ , alors par injectivité de  $g$ , on a  $f(x) = f(x')$ , puis  $x = x'$  par injectivité de  $f$ .

- **Application surjective :** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une **application surjective ou une surjection** lorsque tout élément de  $F$  possède au moins un antécédent par  $f$ , c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$



Surjection : chaque élément de  $F$  a *au moins* un antécédent

*Théorème* : Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ . Si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective. *Démonstration* : Soit  $z \in G$ . Alors il existe un antécédent  $y \in F$  tel que  $z = g(y)$ . Mais  $f$  est surjective, donc il existe un antécédent  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . D'où  $z = g \circ f(x)$ .

- **Application bijective** : Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une **application bijective ou une bijection** lorsque  $f$  est à la fois injective et surjective. Une autre façon de le dire : tout élément de  $F$  possède un unique antécédent par  $f$ , c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x).$$

- **Application réciproque** : Soit  $f$  une bijection de  $E$  dans  $F$ . On appelle **application réciproque ou bijection réciproque** de  $f$ , notée  $f^{-1}$ , l'application de  $F$  dans  $E$  qui à tout élément  $y$  de  $F$  associe son unique antécédent  $x$  de  $E$ . Ainsi :

$$\forall (x, y) \in E \times F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

*Proposition* : Soit  $f$  une bijection de  $E$  dans  $F$  et  $f^{-1}$  son application réciproque. Alors :

$$f \circ f^{-1} = Id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = Id_E.$$

*Théorème* : Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est bijective si et seulement s'il existe une application  $g$  de  $F$  dans  $E$  vérifiant :

$$f \circ g = Id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = Id_E.$$

On a alors  $g = f^{-1}$ . *Démonstration* : Soit  $x \in E$ . Posons  $f(x) = y$ . Alors  $g \circ f(x) = g(y)$ , et  $x = g(y)$ .

Ainsi de  $x = g(y)$ , on a  $f(x) = f \circ g(y)$ . Mais  $f \circ g(y) = y$  car  $f \circ g = Id$ .

Et  $y$  admet  $g(y)$  comme unique antécédent par  $f$ .

*Théorème* : Soit  $f$  une bijection de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une bijection de  $F$  dans  $G$ . Alors  $g \circ f$  est bijective de  $E$  dans  $G$  et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

*Démonstration* : On utilise l'associativité de la composition ! Ainsi :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E,$$

et on conclut avec la propriété précédente.

### 3) Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinalité

On suppose ici que  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis.

- Si  $f: E \rightarrow F$  est injective, alors  $\text{card}(F) \geq \text{card}(E)$ .
- Si  $f: E \rightarrow F$  est surjective, alors  $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$ .
- Si  $f: E \rightarrow F$  est bijective, alors  $\text{card}(F) = \text{card}(E)$ .

*Théorème* : Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de même cardinal, et  $f: E \rightarrow F$  une application. Alors :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$

*Démonstration* :

- On suppose  $f$  bijective. Alors de façon évidente,  $f$  est injective.
- On suppose  $f$  injective. Comme  $f: E \rightarrow f(E)$  est bijective, on a  $\text{card}(E) = \text{card}(f(E))$ . Si  $f$  n'est pas surjective, alors  $\text{card}(F) > \text{card}(f(E))$ , d'où  $\text{card}(E) > \text{card}(f(E))$ , absurde.
- On suppose  $f$  surjective. On a donc  $f(E) = F$ , et  $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F) = \text{card}(E)$ . Si  $f$  n'est pas injective, alors  $\text{card}(F) < \text{card}(E)$ , absurde.

## IV. Exercices

### Exercice n°1

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

- 1) Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ .
- 2) Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto e^z$ .
- 3) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + \frac{1}{x^2+1}$ . (Indication : On constatera que  $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x = x^4 + x^2 + (x - 1)^2$ .)

### Exercice n°2

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 - x - 1$ .

- 1) Déterminer  $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ .
- 2) Déterminer  $f^{-1}(\{0\})$ .

### Exercice n°3

Soient  $E, F, G$  trois ensembles,  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , et  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ .

- 1) Montrer que si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective.
- 2) Montrer que si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.
- 3) On suppose que  $E = G$  et que  $f \circ g \circ f$  est bijective. Montrer que  $f$  et  $g$  sont bijectives.

### Exercice n°4

On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , définie par  $f(x, y) = (x - 4y, 2x + 3y)$ .

- 1) Montrer que  $f$  est bijective.
- 2) Déterminer  $f(\Delta)$  avec  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$ .
- 3) Déterminer  $f^{-1}(\Delta)$ .

### Exercice n°5

Soit  $f \in F(E, F)$  et  $g \in F(F, G)$ .

- 1) Montrer que si  $g \circ f$  est surjective et  $g$  injective, alors  $f$  est surjective.
- 2) Montrer que si  $g \circ f$  est injective et  $f$  surjective, alors  $g$  est injective.

**Exercice n°6**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles.

- 1) Montrer que  $F \subset E \iff E \cap F = F$ .
- 2) Montrer que  $F \subset E \iff E \cup F = E$ .

**Exercice n°7**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . On pose  $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

- 1) Montrer que  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
- 2) Déterminer la fonction indicatrice de  $A\Delta B$  en fonction de la somme et du produit de celles de  $A$  et de  $B$ .
- 3) En déduire que  $A\Delta B = B$  si et seulement si  $A = \emptyset$ .

**Exercice n°8**

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$  et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  :

- 1) Montrer l'inclusion  $f(E) \setminus f(A) \subset f(\overline{A})$ .
- 2) Montrer que  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
- 3) Soit  $B$  une autre partie de  $F$ . Montrer que  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ , puis que  $f(f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$ .

**Exercice n°9**

Soit  $E = \{1, 2, 3\}$ . Décrire  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exercice n°10**

Soit  $A$  une partie de  $E$ , et  $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ ,  $X \mapsto X \cap A$ .

- 1) Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $A = E$ .
- 2) Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $A = E$ .

**Exercice n°11**

Soit  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ .

- 1) Est-ce que  $f$  est injective ?
- 2) Est-ce que  $f$  est surjective ?

**Exercice n°12**

Décrire  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$  (on fera la distinction entre  $\{1\}$  et  $\{\{1\}\}$ ).

**Exercice n°13**

Quelle est la différence entre  $\emptyset$  et  $\{\emptyset\}$  ?

**Exercice n°14**

Soit  $h$  réel strictement positif. On pose  $J_h = ] - h; h[$ .

- 1) Montrer que  $\bigcap_{h \in \mathbb{R}^{*+}} J_h = \{0\}$ .
- 2) Montrer que  $\bigcup_{h \in \mathbb{R}^{*+}} J_h = \mathbb{R}$ .

**Exercice n°15**

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $(B_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $F$ . Montrer que :

- 1)  $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ .
- 2)  $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ .