

Chapitre 11 : Topologie, continuité

M. Calciano

I. Topologie de \mathbb{R}

Définitions :

1) Voisinage d'un point

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Une propriété portant sur une fonction est dite vraie **au voisinage d'un point** a ($a \in \bar{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$) si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert non vide centré en a si $a \in \mathbb{R}$, avec un intervalle du type $]c, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle du type $] - \infty, c[$ si $a = -\infty$.

2) Intérieur

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , on appelle **intérieur de I** , noté I° , l'intervalle obtenu en supprimant de I ses éventuelles extrémités.

Ainsi, pour $I = [a, b]$ (a et b réels), $I^\circ =]a, b[$.

Pour $I = [a, +\infty[$, $I^\circ =]a, +\infty[$.

Exercice n°1 :

Déterminer les intérieurs des intervalles suivants :

$$I = [-2, 3]$$

$$J = [-5, 4[$$

$$K = [2, +\infty[$$

3) Adhérence

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 est dit **adhérent** à A si

$$\forall \delta > 0, \quad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence d'un intervalle I** , notée \bar{I} , l'intervalle de mêmes extrémités que I et contenant les éventuelles extrémités réelles de I .

Pour $I =]a, b[$, on a $\bar{I} = [a, b]$.

Pour $I = [a, +\infty[$, $\bar{I} = [a, +\infty[$.

Exercice n°2 :

Déterminer les adhérences des intervalles suivants :

$$I = [-2, 3]$$

$$J = [-5, 4[$$

$$K = [2, +\infty[$$

4) Théorème

Soit $A \subset \mathbb{R}$, et $x_0 \in A$, alors $x_0 \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x_0 .

II. Limites**1) Limites finies****a) Définition**

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , et $L \in \mathbb{R}$.

Si I est non majoré.

On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq M \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Si I non minoré.

On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq M \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , et $L \in \mathbb{R}$. On considère a un réel de I ou une de ses extrémités.

On dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

Exercice n°3 :

Soit $f(x) = x^n$, démontrer que $f(x)$ tend vers 0 pour x tendant vers 0.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I, (|x| \leq \eta \implies |x^n| \leq \varepsilon)$.

Or $|x^n| \leq \varepsilon \iff |x|^n \leq \varepsilon$, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Remarque :

On note également : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$.

b) Proposition

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , si f a une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Démonstration :

On a $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon = 1, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - L| \leq 1)$.

Donc pour $x \in I, |x - a| \leq \eta$, on a : $|f(x)| \leq 1 + L$.

2) Limites infinies

a) Définition

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , a une extrémité de I .

Si a est réel :

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A).$$

Si $a = +\infty$:

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq B \implies f(x) \geq A).$$

Si $a = -\infty$:

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq B \implies f(x) \geq A).$$

Remarque :

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , a une extrémité de I , on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers a si $-f(x)$ tend vers $+\infty$ si x tend vers a .

3) Théorème d'unicité de la limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $(L_1, L_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ alors $L_1 = L_2$.

Démonstration :

On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - L_1| \leq \varepsilon).$$

Et :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - L_2| \leq \varepsilon).$$

D'où pour $\forall x \in I, (|x - a| \leq \min(\eta_1, \eta_2))$, on a $|f(x) - L_1| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - L_2| \leq \varepsilon$.

Or $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \leq 2\varepsilon$.

Pour $\varepsilon = 1/n$ et passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $L_1 = L_2$.

4) Limite et continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est définie en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

On dit alors que f est **continue** en a .

Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **discontinue**.

Démonstration :

Supposons que $L = +\infty$ (même raisonnement pour $-\infty$).

On a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ donc

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A).$$

Pour $A = f(a) + 1$, on a dans le voisinage de a : $f(x) \geq f(a) + 1$.

En particulier, $f(a) \geq f(a) + 1$, ce qui est impossible.

Donc $L \in \mathbb{R}$.

De $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

En particulier, $|f(a) - L| \leq \varepsilon$, en faisant tendre ε vers 0, on obtient $f(a) = L$.

Exercice n°4 :

Démontrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout point.

Démonstration :

Immédiat car : $||x| - |a|| \leq |x - a|$.

5) Méthode très utile pour déterminer une limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et L un réel. S'il existe une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$|f - L| \leq g \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Démonstration :

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |g(x)| \leq \varepsilon).$$

De plus, $|f - L| \leq g$, donc $\forall x \in I, |f(x) - L| \leq g(x)$.

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - L| \leq |g(x)| \leq \varepsilon).$$

D'où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Exercice n°5 :

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq 0$, montrer que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

En déduire que la fonction racine carrée est continue en a pour $a > 0$.

6) Utilisation des suites

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction possédant une limite finie ou infinie L en a . Alors pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et tendant vers a , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L.$$

Démonstration : (nous traitons ici le cas d'une limite finie)

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

De plus : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \varepsilon.$$

Donc pour $\varepsilon = \eta$, on a $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \eta$ et $|f(x_n) - L| \leq \varepsilon$.

Exercice n°6 :

Montrer que la fonction sinus n'a pas de limites en $+\infty$.

Démonstration :

Supposons que le sinus ait une limite en $+\infty$. Alors $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ et $\sin(\pi + 2n\pi)$ auraient la même limite.

Or $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$ et $\sin(\pi + 2n\pi) = 0$. Contradiction.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et tendant vers a , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$, alors la fonction f a pour limite L en a .

Démonstration :

Il y aurait 9 cas à distinguer. On va traiter ici le cas où $a = +\infty$ et L est finie.

On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$. Supposons que f n'ait pas L comme limite en $+\infty$, alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists x \geq A \text{ tel que } |f(x) - L| > \varepsilon.$$

En particulier pour $A = n$, et en faisant varier n dans \mathbb{N} , on construit une suite (x_n) vérifiant $|f(x_n) - L| > \varepsilon$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (par minoration) et le passage à la limite dans $|f(x_n) - L| > \varepsilon$ donne $0 > \varepsilon$. Absurde!

III. Limites et continuité à gauche, à droite

1) Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I .

La fonction f est continue à droite en a , si $f_{I \cap [a, +\infty[}$ est continue en a .

La fonction f est continue à gauche en a , si $f_{I \cap]-\infty, a]}$ est continue en a .

Exercice n°7 :

La fonction partie entière est continue à droite en tout point de \mathbb{R} , mais elle n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2) Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I .

Alors la fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de a .

3) Limite à droite et à gauche

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de I , autre que l'extrémité supérieure de I .

La limite à droite de f en a , notée $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, est la limite de $f_{I \cap [a, +\infty[}$ en a lorsque cette dernière est définie.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de I , autre que l'extrémité inférieure de I .

La limite à gauche de f en a , notée $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, est la limite de $f_{I \cap]-\infty, a]}$ en a lorsque cette dernière est définie.

Exercice n°8 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \text{sh}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Démonstration :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \sin(x) = 0.$$

$$\text{Et : } \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \text{sh}(x) = 0.$$

Donc f est continue en 0.

4) Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de I . Alors la fonction f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

De même pour la continuité à gauche.

Remarque

On parle de discontinuité de première espèce si la fonction admet une limite à gauche et une limite à droite finies, mais de valeurs différentes.

On parle de discontinuité de seconde espèce si au moins l'une des deux limites à gauche ou à droite n'existe pas ou est infinie.

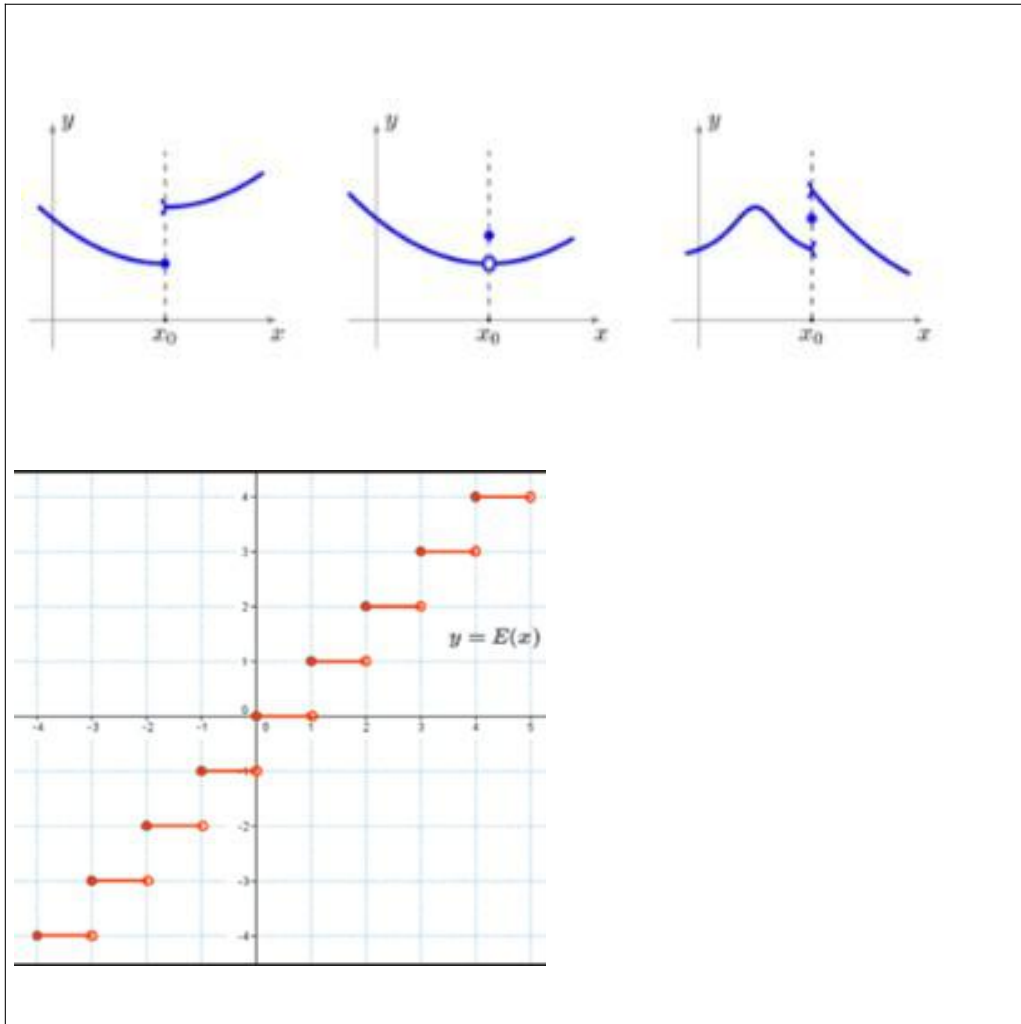


Figure 1 – Exemples de discontinuités

5) Théorème de prolongement par continuité

Soit $a \in I$, et $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Il existe une fonction $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a prolongeant f sur I si et seulement si f admet une limite finie en a .

Dans ce cas, un tel prolongement est unique et $\tilde{f}(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

On l'appelle le prolongement par continuité de f en a .

Démonstration :

Si un tel prolongement existe, il sera unique par construction et par l'unicité de la limite.

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in I \setminus \{a\}} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in I \setminus \{a\}} f(x) = \tilde{f}(a).$$

Montrons que ce prolongement est continu. Soit $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Comme $\tilde{f}(a) = L$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout x de $I \setminus \{a\}$ vérifiant $|x - a| \leq \eta$, on a :

$$|\tilde{f}(x) - L| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leq \varepsilon.$$

Exercice n°9 :

Soit f définie par : $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* . Déterminer le prolongement par continuité \tilde{f} de f .

Démonstration :

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Donc \tilde{f} définie par

$$\begin{cases} \tilde{f}(0) = 1 \\ \tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$$

est le prolongement de f par continuité.

6) Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

On désigne par $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur I .

7) Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions continues sur I , et α un réel.

Les fonctions $f + g$ et αf sont continues sur I .

Le produit fg est continu sur I .

Si, de plus, f ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I .

Soient I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

Démonstration : Évidente avec la caractérisation séquentielle de la continuité.

On peut alors dresser une liste de fonctions usuelles continues :

L'exponentielle, la racine carrée, le logarithme, les polynômes sont continus sur leur domaine de définition.

Le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est également continu.

IV. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Le théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , à valeurs réelles, et a et b deux points de I . Alors toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f .

Démonstration :

Soit y entre $f(a)$ et $f(b)$. On cherche c entre a et b tel que $y = f(c)$.

On peut supposer que $f(a) \leq y \leq f(b)$.

On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

Et :

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq y \\ \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

En effet :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq y \\ \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ et tend vers 0.

De plus :

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} \frac{b_n-a_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

De même, on montrerait que $b_{n+1} - b_n \leq 0$.

Donc les deux suites convergent. Notons c leur limite commune.

On a $f(c) \leq y$ et $f(c) \geq y$ donc $f(c) = y$.

2) Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et strictement monotone sur I , à valeurs réelles, et a et b deux points de I . Alors pour toute valeur y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel x entre a et b tel que $y = f(x)$.

3) Conséquence fondamentale

L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

Soit $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ avec $\alpha \leq \beta$. Par le TVI, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

On conclut que $f(I)$ est un intervalle.

Exercice n°10 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante.

Démonstration :

Supposons que f ne soit pas constante. Il existe $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ avec $\alpha \neq \beta$.

Si $f(a) = -f(b)$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Par le TVI, il existe c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Sinon, on a alors $|f(a)| \neq |f(b)|$ et $|f|$ non constante. Contradiction.

4) Quelques conséquences immédiates du TVI

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, a et b deux points de I . Alors si $f(a)f(b) \leq 0$, il existe un réel c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Si f ne s'annule jamais sur I , alors f est de signe constant sur I .

5) Théorème des bornes atteintes

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $a < b$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

6) Image d'un segment par une fonction continue

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration :

Soit f continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Soit m et M les minimum et maximum.

D'après le TVI, $f([a, b])$ est un intervalle et clairement $f([a, b]) \subset [m, M]$.

Et comme m et M sont dans $f([a, b])$, donc $f([a, b]) = [m, M]$.

7) Théorème de la bijection

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, une fonction continue et strictement monotone. Alors :

La fonction f définit une bijection de I sur $f(I)$.

Et f^{-1} est continue et strictement monotone, de même monotonie que f .

Démonstration :

Si f est strictement croissante, si $x < y$, supposons que $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$. Alors

$f(f^{-1}(x)) > f(f^{-1}(y))$, et $x > y$ absurde.

Donc f^{-1} a la même monotonie.

De plus $f^{-1}(J)$ est un intervalle. Or si $f^{-1}(J)$ est un intervalle alors f^{-1} est continue.

8) Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle non réduit à un point.

Si f est injective, alors f est strictement monotone.

Démonstration (sous forme d'exercice)

On suppose qu'il existe $(x_1, y_1) \in I^2$ tels que $x_1 < y_1$ et $f(x_1) > f(y_1)$ et $(x_2, y_2) \in I^2$ tels que $x_2 < y_2$ et $f(x_2) \leq f(y_2)$.

On définit la fonction φ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par $\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$.

Montrer que φ s'annule sur $]0, 1[$.

Conclure.

V. Compléments sur les limites

1) Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$.

2) Calcul algébrique de limites

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de limites respectives L et L' dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a .

Alors $f + g$ a pour limite $L + L'$.

Alors si α désigne un réel, αf tend vers αL lorsque x tend vers a .

Alors fg tend vers LL' lorsque x tend vers a .

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ a pour limite L lorsque x tend vers a , avec $L \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$.

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ a pour limite $\pm\infty$ lorsque x tend vers a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ a pour limite 0, en restant de signe constant strictement positif (resp strictement négatif) lorsque x tend vers a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp $-\infty$).

3) Composition de limites

Soient I et J deux intervalles d'intérieur non vide et $f : I \rightarrow J$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors $b \in J$ ou b est une extrémité de J .

De plus si $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = L$.

VI. Exercices

Exercice n°11 :

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$.
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + x^2 + 5}{5x^3 - x^2 + 2}$.
6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{5x^3 - x^2 + 2}$.

Exercice n°12 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - E(x)$.

Soit n un entier relatif. Déterminer, si elles existent, $\lim_{x \rightarrow n, x < n} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow n, x > n} f(x)$.

Exercice n°13 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue?

Exercice n°14 :

Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice n°15 :

Soient f et g deux fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ continues en $a \in I$.

Démontrer que les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues en a .

Exercice n°16 :

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Démontrer que f est continue en tout point.

Exercice n°17 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Z}$. Démontrer que f est constante.

Exercice n°18 :

1. Montrer que toute fonction polynomiale réelle de degré impair admet au moins un zéro sur \mathbb{R} .
2. Montrer qu'une fonction continue sur \mathbb{R} et périodique est bornée et atteint ses bornes.

Exercice n°19 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice n°20 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Démontrer que f est minorée et que sa borne inférieure est atteinte.

Exercice n°21 :

Pour $x \in [1, +\infty[$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sqrt{t}}$.

1. Que vaut, pour $x > 0$, $\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$?
2. Démontrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t + \sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.
3. En déduire une majoration de $|\ln(2) - f(x)|$.
4. Quelle est $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Exercice n°22 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, telle qu'il existe un réel a vérifiant $f(f(a)) = a$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = c$.

Exercice n°23 :

Démontrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x + 1$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Exercice n°24 (Concours) :**Exercice n°25 :**

Soit f une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice n°26 :

Soit f la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (E(x))^2 + (2E(x) + 1)(x - E(x)).$$

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice n°27 :

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice n°28 :

Cet exercice nécessite de savoir que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , ce qui signifie que dans n'importe quel intervalle non vide de \mathbb{R} et ne comportant pas un seul élément (donc au moins deux éléments), on peut trouver un rationnel (donc appartenant à \mathbb{Q}).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$.
3. Établir que pour tout $r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar$ avec $a = f(1)$.
4. Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$.

Exercice n°29 :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)| \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice n°30 :

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha$.

Exercice n°31 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers $] - 1, 1[$.
2. Déterminer, pour $y \in] - 1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.
3. f est-il un homéomorphisme? (à savoir f bijective, f continue et f^{-1} continue)

Exercice n°32 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} , continue en 0 et en 1 et vérifiant pour tout réel $x : f(x) = f(x^2)$.

Montrer que f est constante.

Exercice n°33 : <https://youtu.be/B1ni5mAGlesLien> vers la vidéo

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0, 1[\\ x - 1 & \text{si } x \in [2, 3[\end{cases}$$

1. Montrer que f définit une bijection réciproque, continue et strictement croissante de son domaine de définition sur $]0, 2[$.
2. Son application réciproque est-elle continue?

Exercice n°34 :

Soient u et v deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telles que $u(0) = v(1) = 0$ et $u(1) = v(0) = 1$.

Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $u(x) = v(x)$.