Chapitre 12 : Polynômes

M. Calciano

Dans tout le chapitre, $\varkappa$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités

1) Définition

Un **polynôme** est une expression de la forme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ où n est un entier naturel, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \varkappa^{n+1}$ sont les coefficients de P et X l'indéterminée.
Le **degré d'un polynôme** non nul est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. On note $\deg P$ cet entier. On convient que pour le polynôme nul P, $\deg P = -\infty$.

2) Quelques opérations

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k$. Soit $\alpha \in \varkappa$.

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)X^k$$

$$\alpha P = \sum_{k=0}^{n} \alpha a_kX^k$$

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$$

3) Degré

Soient P et Q deux polynômes, $\alpha \in \varkappa^*$. Alors :

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$.
- $\deg(\alpha P) = \deg P$.
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Démonstrations du 2) et 3) évidentes à partir des écritures polynomiales.

Exemples : Soit $P = 3X^2 + X + 1$, $Q = -X^3 + 1$ et $R = X^3 + X^2 + 1$. Alors : $\deg(P) = 2$, $\deg(PQ) = 5$ et $\deg(Q + R) = 2$.

4) Composée

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors on définit $P \circ Q$ comme polynôme composé de P par Q comme étant le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$(P \circ Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kQ^k$$

Remarque : On note également $P(Q)$.

Exemple : Si $P = X^2 + 2X - 1$ et $Q = X + 3$, alors

$$P \circ Q = (X+3)^2 + 2(X+3) - 1 = X^2 + 8X + 14.$$

Proposition : Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si $\deg(Q) \geq 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

5) Formule du binôme de Newton (due en réalité à Simon Stévin)

Soient A et B deux polynômes et n un entier naturel, alors :

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathbf{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Démonstration : Identique à celle traitée dans le cas réel.

6) Quelques propriétés :

a) On a : $\forall (A,B) \in \varkappa[X]^2,\ AB = 0 \Longrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

b) Soit $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et P deux polynômes de $\varkappa[X]$, alors $A \circ P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k P^k \in \varkappa[X]$.

Preuve de a) Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors, comme $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B) \neq -\infty$, *donc $AB \neq 0$, résultat démontré par contraposée.*

Preuve de b) Il suffit d'appliquer les propriétés du 2).

II. Fonction polynomiale et dérivation

1) Définition :

Soit A un polynôme, la fonction $\widetilde{A} : \varkappa \to \varkappa$, $x \mapsto \widetilde{A}(x)$ est appelée fonction polynomiale associée au polynôme A.

Exemple : la fonction $f(x) = x^2 + 3x + 10$ est la fonction polynomiale associée à $X^2 + 3X + 10$.

Remarque : Dans la pratique, $\widetilde{A}$ est notée A. Cette distinction entre polynôme et fonction polynomiale associée peut paraître artificielle. Et sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle permet principalement de nommer le polynôme, un peu comme « cos » est le nom de la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\cos(x)$. Mais sur des corps plus « exotiques », la différence est de taille. Ainsi, sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le polynôme $2X$ est représenté par la fonction nulle...

2) Dérivée :

Comme toute fonction, on peut s'intéresser à sa dérivabilité... Soit $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on définit le polynôme dérivé par :

$$A' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1}$$

Remarque : la fonction polynomiale associée à A' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à A.

Exemple : $A = X^4 + 3X^2 + 2$ a pour dérivée : $A' = 4X^3 + 6X$.

3) Propriétés :

Soit A un polynôme de $\varkappa[X]$, alors :

— Si $\deg(A) > 0$, alors $\deg(A') = \deg(A) - 1$.

— Sinon, $A' = 0$.

Démonstration : Si $\deg(A) \geq 1$, *alors* $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *avec* $a_n \neq 0$. *Et :* $A' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ *avec* $n a_n \neq 0$, *donc* $\deg(A') = \deg(A) - 1$.

4) Dérivées successives :

Soit A un polynôme de $\varkappa[X]$, alors on définit par récurrence les dérivées successives de A par :

$$A^{(0)} = A \quad \text{et} \quad A^{(r+1)} = (A^{(r)})'$$

Soit A et B deux polynômes de $\varkappa[X]$, alors pour tout entier naturel r :

$$(\alpha A + \beta B)^{(r)} = \alpha A^{(r)} + \beta B^{(r)}$$

Démonstration : Par récurrence sur r.

5) Dérivées successives (2)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, un polynôme. Alors :

— si $p > n$, $P^{(p)} = 0$.

— si $p \leq n$, $P^{(p)} = \sum_{k=p}^{n} a_k \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p}$.

Démonstration : par récurrence.

6) Formule de Taylor

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $\alpha \in \varkappa$. Alors :

$$P = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n$$

Démonstration : On démontre pour X^p et on utilise la linéarité. On a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(X^p)^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)\alpha^{p-k}}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(X-\alpha)^k \alpha^{p-k} = X^p.$$

Exemple : Écrire le développement de Taylor pour $P = 2X^3 + X^2 - 5X + 2$ en 2.

7) Divisibilité

Soient A et B deux polynômes de $\varkappa[X]^2$, B divise A s'il existe $Q \in \varkappa[X]$, tel que : $A = B \times Q$. On note $B \mid A$.

Exemple : $X^2 - X - 6$ est divisible par $X + 2$ car $X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3)$.

8) Division euclidienne [Lien vidéo]

Soient A et B deux polynômes de $\varkappa[X]^2$, tel que $B \neq 0$, alors il existe un unique couple (Q, R) de $\varkappa[X]^2$, tel que :

$$A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

Démonstration : Pour l'unicité, on suppose l'existence de deux couples $(Q_1, R_1) \in \varkappa[X]^2$ *et* $(Q_2, R_2) \in \varkappa[X]^2$, *et on montre que* $\deg(Q_1 - Q_2) < 0$, *puis que* $Q_1 = Q_2$ *et* $R_1 = R_2$. *Pour l'existence, on fait une récurrence avec l'hypothèse :* $H_n : \{\forall A \in \varkappa_{n-1}[X],\ \exists (Q, R) \in \varkappa[X]^2,\ A = BQ + R$ *et* $\deg(R) < \deg(B)\}$.

Exemple : $X^3 - 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)(X - 2) + (-X + 3)$.

9) Polynômes unitaires, polynômes irréductibles

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on dit que P est **unitaire** si $a_n = 1$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que le polynôme P est **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ s'il admet exactement deux diviseurs unitaires.

Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = 2X^2 + X + 1$ admet comme seuls diviseurs unitaires 1 et $X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$, donc P est irréductible.

10) Proposition

- Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.
- Dans $\mathbb{C}[X]$, seuls les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

III. Racines d'un polynôme

1) Définition

Soit P un polynôme de $\varkappa[X]$ et $\alpha \in \varkappa$, α est racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Théorème : On a : α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.

Définition : Soit P un polynôme de $\varkappa[X]$ et $\alpha \in \varkappa$, α est racine de P de multiplicité k, si k est le plus grand entier tel que $(X - \alpha)^k$ divise P.

Exercice : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Si α est une racine de P dans $\mathbb{C}$ de multiplicité m, alors $\overline{\alpha}$ aussi.

2) Racines multiples

Soit P un polynôme de $\varkappa[X]$ et $\alpha \in \varkappa$, α est racine de P. On a : α racine de P de multiplicité k (k entier non nul) si et seulement si

$$[P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{ET} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0]$$

Démonstration : Si α racine de P de multiplicité k (k entier non nul), alors il existe $Q \in \varkappa[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^k Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Alors clairement $P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Réciproquement : si $P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Comme $P(X) = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X - \alpha) + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n$, alors $P(X) = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n$ et on factorise par $(X - \alpha)^k$.

Remarque : Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les deux caractérisations des racines d'un polynôme sont absolument équivalentes. Mais par exemple, sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $P(X) = 2X + 2$ vérifie $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$...

3) Racines et degré

Soit $P \in \varkappa_n[X]$ (polynômes dont le degré maximal est n).

— Si $\deg P = n$ alors P admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité.

— Si le nombre de racines de P comptées avec leur multiplicité est supérieur à $n + 1$ alors $P = 0$.

Démonstration : Si A admet p racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, alors A est divisible par $\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)$ donc $p \leq \deg(A)$.

Exercice : Soit un entier naturel n, en admettant l'existence d'un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $A(\cos(x)) = \cos(nx)$, montrer qu'il est alors unique.

Supposons qu'il existe deux polynômes A et B alors $A - B$ aurait une infinité de racines donc $A - B = 0$ et $A = B$.

4) Polynôme scindé

Un polynôme P de $\varkappa[X]$ est **scindé** s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1 :

$$P = \alpha(X - x_1) \times \cdots \times (X - x_n) \quad \text{avec } (\alpha, x_1, \ldots, x_n) \in \varkappa^{n+1}$$

Exercices :

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^3 - n^2 + 1$, montrer alors que $P = X^3 - X^2 + 1$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sqrt[3]{n^2 + 1}$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(k) = \frac{1}{k}$. Montrer que $P(-1) = n + 1$.

5) Polynômes premiers entre eux

Deux polynômes sont dits **premiers entre eux**, si leurs seuls diviseurs communs sont les polynômes constants.

6) Fonctions symétriques

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \alpha(X - x_1) \times \cdots \times (X - x_n)$ un polynôme scindé de degré n. On note $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \ldots, x_n$ définies pour k entier entre 1 et n par :

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

Théorème : Les coefficients de P s'expriment à l'aide des fonctions symétriques :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Remarque : Pour $n = 2$, on retrouve que pour le polynôme $ax^2 + bx + c$, la somme de ses racines est $-b/a$ et le produit de ses racines c/a.

Démonstration : On développe l'expression $a_n \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$ puis on identifie les coefficients de A devant X^{n-1} et devant X^0.

Exemple : Soit $P = (X-1)(X-2)(X-3)$, calculer $\forall k \in [\![1, 3]\!]$ σ_k.

7) Interpolation de Lagrange

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres distincts, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des nombres quelconques. Alors il existe un polynôme $P \in \varkappa_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left[\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right]$$

Démonstration : En exercice !

IV. Factorisation

1) Théorème fondamental (admis)

Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine complexe. Ce théorème dit de d'Alembert-Gauss est admis, et il est faux sur $\mathbb{R}$, par exemple avec X^2+1.

Remarque : Ainsi sur $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme est scindé.

2) Décomposition

Tout polynôme de $\varkappa[X]$ se factorise de façon unique (à l'ordre près des facteurs).

Sur $\mathbb{C}$,

$$P(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{p_i}$$

où α_i pour $i \in [\![1,n]\!]$ sont les racines complexes distinctes de P et p_i leur multiplicité respective.

Sur $\mathbb{R}$,

$$P(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{p_i} \prod_{j=1}^{m} (X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j}$$

où α_i pour $i \in [\![1,n]\!]$ sont les racines complexes distinctes de P et p_i leur multiplicité respective et les $X^2+\beta_j X+\gamma_j$ sont des polynômes irréductibles de degré 2 (discriminant < 0).

Démonstration : Pour le cas complexe, c'est l'application du théorème fondamental, les polynômes irréductibles étant ceux de degré 1.

Pour le cas réel : Les polynômes de degré 1 sont irréductibles (théorème fondamental). Pour les polynômes de degré 2, si le discriminant est strictement négatif, il ne possède aucune racine réelle donc est irréductible. Il reste à montrer qu'un polynôme de degré 3 réel n'est pas irréductible. P admet au moins une racine complexe λ.

- *1er cas : λ est réel et c'est fini.*
- *2ème cas : λ n'est pas réel, alors P est également divisible par $X-\overline{\lambda}$. Donc P divisible par $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - 2\Re(\lambda) + |\lambda|^2$ et donc P non irréductible.*

3) Polynômes premiers entre eux et racines communes

Pour montrer que deux polynômes sont premiers entre eux sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il suffit de montrer qu'ils n'ont pas de racines communes sur $\mathbb{C}$.

V. Exercices

Exercice n°1 Soit n entier non nul, déterminer le degré et le coefficient dominant de $P = (X-2)^n - (X+5)^n$.

Exercice n°2 Soit $A = 2X^5 - 4X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 5X + 8$ et $B = X^2 - 2X + 3$. Effectuer la division euclidienne de A par B.

Exercice n°3 Montrer que la fonction sinus n'est pas polynomiale.

Exercice n°4 Soit n un entier non nul, montrer que le polynôme $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice n°5 Soit n entier naturel non nul, décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^n + 1$ en produit de polynômes du premier degré.

Exercice n°6

1. Quelles sont les relations liant les coefficients et les racines d'un polynôme scindé de degré 3 ?
2. Montrer qu'un polynôme de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$ possède au moins une racine réelle.

Exercice n°7 Déterminer tous les polynômes P tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 3$, $P''(1) = 8$ et $P^{(n)}(1) = 0$ si $n > 2$.

Exercice n°8 Soit n entier supérieur ou égal à 2, déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X+1)^2$.

Exercice n°9 Soit le polynôme P défini par $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$, déterminer $P^{(l)}(X)$.

Exercice n°10 [Lien vidéo] Factoriser $X^8 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°11 Soit P le polynôme $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.

1. Montrer que 2 est racine.
2. Quel est l'ordre de multiplicité de cette racine.
3. Déterminer les autres racines de P avec leur ordre de multiplicité.

Exercice n°12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\varkappa$.

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme $L_k \in \varkappa_{n-1}[X]$, vérifiant : $L_k(x_k) = 1$ et $\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}, L_k(x_j) = 0$.
2. Montrer que pour tout $P \in \varkappa_{n-1}[X]$, on a $P = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k$.

Remarque : Les polynômes $L_1, \dots, L_n$ sont appelés polynômes de Lagrange associés à la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice n°13 Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = P(-X)$, montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, tel que $P(X) = Q(X^2)$.

Exercice n°14 Factoriser $X^6 - 2\cos(6\theta)X^3 + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°15 Soit $P(X) = X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5$. Montrer que i est racine de P, en déduire une factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°16 Soit P et Q deux polynômes tels que $P^2 = (X-1)Q^2$, montrer que $P = Q = 0$.

Exercice n°17 Déterminer P dans $\mathbb{R}[X]$, tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice n°18 Montrer que $(X+1)^{2017} - X^{2017} - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice n°19 *Les 3 questions sont indépendantes.*

1. Soient A et B deux polynômes de $\varkappa[X]$, montrer que $\deg(A \circ B) = \deg(A)\deg(B)$.
2. Soit T un réel non nul, déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est T-périodique.
3. Trouver toutes les racines complexes du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant que deux de ces racines ont une somme égale à 2.

Exercice n°20 Décomposer en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^4 + 1$
2. $X^7 - 1$

Exercice n°21 Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que si P admet une racine rationnelle de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Le polynôme $X^5 - X^2 + 1$ admet-il des racines dans $\mathbb{Q}$?

Exercice n°22 Soit un réel a, un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, tel que : $\forall n \leq \deg(P),\ P^{(n)}(a) > 0$. Montrer que P n'admet pas de racines dans $[a, +\infty[$.

Exercice n°23 Soit n entier naturel,

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
2. Montrer que toutes les racines de P sont réelles, simples et dans $[-2, 2]$.

<u>Exercice n°24</u> (Devoir commun INP 2025)

1. Montrer que
$$P = X^3 - sX^2 + dX - r.$$
2. On suppose que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ vérifient
$$s = r = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$
   (a) Montrer que $d = 1$ et factoriser P.
   (b) En déduire l'ensemble E des triplets (a, b, c) de nombres complexes vérifiant
$$a + b + c = abc = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

<u>Exercice n°25</u> (Devoir Commun INP 2023)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$z^n - 1 = 0.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Retrouver, en justifiant vos calculs, la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k.$$
3. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$
   Donner, sans la justifier, une transformation similaire de $1 + e^{i\theta}$.
4. Dans cette question et les suivantes, on considère un entier naturel $n \geq 2$. On note toujours $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Déduire de la question 3 la forme algébrique du complexe
$$\frac{1 + \omega^k}{1 - \omega^k}$$
   pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme
$$P = (X+1)^n - (X-1)^n.$$
   (a) Quel est le degré de P ? Quel est le coefficient dominant de P ? Quel est son coefficient constant ?
   (b) En utilisant les racines n-ièmes de l'unité et les questions précédentes, factoriser le polynôme P sur $\mathbb{C}$.
6. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\prod_{k=1}^{2p} \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = (-1)^p (2p+1).$$