

Chapitre 13 : Espaces vectoriels

M. Calciano

I. Généralités

1) Définition

Soit E un ensemble non vide, muni de deux lois : l'une de composition interne notée « $+$ », et l'autre de composition externe notée « \cdot ». Ainsi,

$$+ : E \times E \rightarrow E \quad \text{et} \quad \cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E.$$

On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ définit un **espace vectoriel** sur le corps \mathbb{K} (à notre niveau \mathbb{R} ou \mathbb{C}), ou encore qu'il définit un \mathbb{K} -espace vectoriel si :

- $(E, +)$ est un groupe abélien (on note 0_E l'élément neutre) ;
- pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$:

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x;$$

- pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$:

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x;$$

- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $x, y \in E$:

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y;$$

- pour tout $x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

Remarque : Lorsqu'on a un \mathbb{K} -espace vectoriel, les éléments x de E sont appelés **vecteurs**, et les λ de \mathbb{K} sont les **scalaires**.

2) Règles de calculs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E.$$

De plus,

$$(-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -x.$$

Exemple : Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 ,

$$2(1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (3, 3, 1).$$

On dit alors que $(3, 3, 1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$.

3) Produit cartésien

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Alors $E \times F$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration : Il suffit de vérifier toute l'axiomatique...

Exemple : $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est ainsi un \mathbb{R} -espace vectoriel puisque $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

4) Sous-espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E . On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- F est non vide (ou de façon équivalente, $0_E \in F$);
- pour tout $(x, x') \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \cdot x + x' \in F.$$

Exemple : $\mathbb{K}[X]$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En effet, $0 \in \mathbb{K}_n[X]$; soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$, alors $\lambda P + Q$ est un polynôme dont le degré est au plus n , donc $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Remarque : Il est beaucoup moins fastidieux de démontrer qu'un ensemble a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel en démontrant qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel « connu ».

Exercice : Les ensembles

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1)\}$$

sont-ils des sous-espaces vectoriels respectivement de \mathbb{R}^3 et de $\mathbb{R}[X]$?

5) Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors

$$\bigcap_{i \in I} F_i$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : Pour tout i , $0_E \in F_i$ puisque ce sont des sev de E , donc $0_E \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Pour tout i , $\lambda x + y \in F_i$, donc $\lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

6) Somme de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même \mathbb{K} -espace vectoriel E . On note $F + G$ l'ensemble de tous les vecteurs de E somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\} = \{v \in E \mid \exists(x, y) \in F \times G, v = x + y\}.$$

Exemple : Démontrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un même \mathbb{K} -espace vectoriel E , alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

7) Sous-espaces supplémentaires

a) Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** dans E si :

$$E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

On note alors $E = F \oplus G$.

b) Caractérisation

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

$$E = F \oplus G$$

si et seulement si

$$\forall v \in E, \exists!(x, y) \in F \times G \text{ tel que } v = x + y.$$

Exercice : Faire la démonstration !

8) Somme d'un nombre fini de sous-espaces

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E . On note

$$F_1 + \dots + F_p$$

l'ensemble de toutes les sommes $x_1 + \dots + x_p$ avec $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$.

9) Sous-espaces vectoriels engendrés

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Étant donné une famille (x_1, \dots, x_p) de vecteurs de E , on appelle **combinaison linéaire** des vecteurs x_1, \dots, x_p toute expression de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \quad \text{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Définition : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E . On appelle **sous-espace vectoriel engendré par A** , et on note $\text{Vect}(A)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A . $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant A .

Exemples :

- Soit u un élément quelconque de E . L'ensemble $\text{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par u . Il est souvent noté $\mathbb{K}u$. Si $u \neq 0_E$, on parle d'une *droite vectorielle*.
- Si u et v sont deux vecteurs de E , alors $\text{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$. Si u et v ne sont pas colinéaires, $\text{Vect}(u, v)$ est un *plan vectoriel*.

Exercice :

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2)$.
2. A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1 + X, X, X^2)$?

II. Cas de la dimension finie

1) Définitions

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E .

— On dit que \mathcal{F} est une **famille génératrice** de E si $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = E$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p.$$

— On dit que \mathcal{F} est une **famille libre** si la seule combinaison linéaire des vecteurs x_1, \dots, x_p donnant le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée**.

— On dit que \mathcal{F} est une **base** de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exercice :

1. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2t \text{ et } z = 3y\}$. Montrer que $E = \text{Vect}((2, 0, 0, 1), (0, 1, 3, 0))$.
En déduire que E est un sev de \mathbb{R}^4 .
2. Montrer que la famille $((2, 1), (-1, 3), (0, 2))$ est liée dans \mathbb{R}^2 .

2) Théorème dit de caractérisation des bases

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E . Alors \mathcal{B} est une base si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p.$$

Remarque : Dans ce cas, les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ s'appellent les **coordonnées** de x .

Démonstration : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit $x \in E$. Comme \mathcal{B} est génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$. Réciproquement, supposons que

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p.$$

Clairement \mathcal{B} est génératrice. Est-elle libre ? Si $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$, comme $0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_p = 0$, par unicité on obtient $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Exercice : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère la famille $\mathcal{G} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ définie par :

$$P_1(X) = 1, \quad P_2(X) = X, \quad P_3(X) = X^3 + 1, \quad P_4(X) = 1 + X^2, \quad P_5(X) = X - X^3.$$

Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) forme une base de E . Donner les coordonnées de P_5 dans cette base.

3) Définition

Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Exemple :

- $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.
- $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

4) Théorème de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

- Soit L une famille libre de E . Alors il existe une base \mathcal{B} de E comportant un nombre fini de vecteurs telle que $L \subset \mathcal{B}$.
- Soit G une famille génératrice de E . Alors il existe une base \mathcal{B} de E comportant un nombre fini de vecteurs telle que $\mathcal{B} \subset G$.

5) Cardinaux

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient L une famille libre et G une famille génératrice dans E . Alors

$$\text{card}(L) \leq \text{card}(G).$$

6) Proposition (admise)

Tous les espaces vectoriels de dimension finie admettent des bases. Pour un espace vectoriel de dimension finie donné, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle **dimension** de E le nombre commun de vecteurs de toutes les bases de E . Cet entier est noté $\dim E$.

7) Familles de vecteurs en dimension finie

a) Familles libres et génératrices en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E . Alors :

- si \mathcal{F} est libre, $p \leq n$;
- si \mathcal{F} est génératrice, $n \leq p$;
- si $p < n$, \mathcal{F} n'est pas génératrice ;
- si $p > n$, \mathcal{F} est liée.

b) Familles libres maximales / génératrices minimales

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie. On dit que :

- \mathcal{F} est **libre maximale** si elle est libre et de cardinal n ;
- \mathcal{F} est **génératrice minimale** si elle est génératrice et de cardinal n .

c) Théorème

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

- si \mathcal{F} est une base de E , $p = n$;
- si $p = n$, \mathcal{F} est une base de $E \iff \mathcal{F}$ est libre $\iff \mathcal{F}$ est génératrice de E .

Ainsi, \mathcal{F} est une base si et seulement si \mathcal{F} est libre maximale ou génératrice minimale.

8) Calculs sur les dimensions

a) Dimension des sous-espaces

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$ un sous-espace de E . Alors

$$\dim(F) \leq \dim(E),$$

avec égalité si et seulement si $F = E$.

b) Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace de dimension finie. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration : Soit S un supplémentaire de $F \cap G$ dans G . On a $G = S \oplus (F \cap G)$. Montrer alors que $F + G = S \oplus F$.

c) Espaces supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie. Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si

$$\begin{cases} F \cap G = \{0_E\}, \\ \dim F + \dim G = \dim E. \end{cases}$$

Démonstration : Si F et G sont deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie, alors $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$. Donc

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Remarque : Ainsi, si E est de dimension finie, les propositions suivantes sont équivalentes :

- $E = F \oplus G$;
- $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$;
- $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$;
- $E = F + G$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

d) Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F_1, \dots, F_p des sous-espaces de E . Alors

$$\dim(F_1 + \dots + F_p) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i),$$

avec égalité si et seulement si la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe.

Démonstration : Par récurrence sur p . Pour $p = 2$, la formule de Grassmann donne

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2),$$

donc $\dim(F_1 + F_2) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2)$ avec égalité ssi $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$, c'est-à-dire ssi $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

e) Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps \mathbb{K} . On sait déjà que $E \times F$ est un espace vectoriel; il est en plus de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Remarque : Si $L(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F , alors $L(E, F)$ est de dimension finie et sa dimension est $\dim(E) \times \dim(F)$, mais cette formule sera vue dans un prochain chapitre.

Démonstration : Elle sera faite dans le chapitre sur les matrices.

f) Rang d'une famille de vecteurs

Le **rang** d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Exemple : pour une famille de vecteurs linéairement indépendants, son rang est le nombre de vecteurs.

Exercice : Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3) . Soient

$$x_1 = (1, 2, 3), \quad x_2 = (0, 2, 1), \quad x_3 = (2, 6, 7)$$

trois vecteurs de E et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$. Déterminer le rang de la famille \mathcal{F} et déterminer un supplémentaire G de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ dans E .

III. Exercices

Exercice n°1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_a : x \mapsto \cos(x+a)$ est combinaison linéaire des fonctions sin et cos.

Exercice n°2

1. Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2. En est-il de même pour

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}?$$

Exercice n°3 Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On note $E_{a,b}$ l'ensemble des suites $u \in \mathbb{K}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Montrer que $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K} .

Exercice n°4

1. Montrer que (\cos, \sin) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. La famille $(1, \sin, \cos, \sin^2, \cos^2)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
3. Montrer que $(1, X + 1, X^2 + X + 1)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice n°5 Dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n , on considère la famille

$$\left(1, X - a, \frac{(X - a)^2}{2}, \dots, \frac{(X - a)^n}{n!}\right).$$

1. Montrer que cette famille est libre.
2. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Soit P un polynôme de degré au plus n . Donner ses coordonnées dans cette base.

Exercice n°6

1. Soit (x_1, x_2, x_3) une famille libre d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que

$$(x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1 + x_2)$$

est libre.

2. Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) une famille libre d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . La famille

$$(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_1 + x_4)$$

est-elle libre ?

Exercice n°7 Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x - a|$. Soit n un entier non nul et a_1, \dots, a_n des réels distincts. Montrer que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice n°8 Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{ax}$. Montrer que pour tout entier naturel n , la famille $(f_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ est libre.

Exercice n°9 Soit

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et préciser sa dimension.

Exercice n°10 Pour $a \in \mathbb{K}$, on considère la famille

$$\mathcal{F} = \{1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\}$$

pour n entier.

1. Montrer que \mathcal{F} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. En déduire une nouvelle démonstration de la formule de Taylor dite polynomiale.

Exercice n°11 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel et H un hyperplan de E .

1. Montrer que $\dim(F \cap H) \geq \dim(F) - 1$.
2. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice n°12 Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux familles finies d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On note \mathcal{F} la famille obtenue en concaténant \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Montrer que

$$\max(\text{rg } \mathcal{F}_1, \text{rg } \mathcal{F}_2) \leq \text{rg } \mathcal{F} \leq \text{rg } \mathcal{F}_1 + \text{rg } \mathcal{F}_2.$$

Exercice n°13 Soit

$$F = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(1) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice n°14 Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ et $\text{Vect}(1 + X + X^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice n°15

1. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel E . Montrer que

$$\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B).$$

2. Soit $A = \{X - 1, X\}$ et $B = \{1, X, X^2\}$. Montrer que $1 \in \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$. Que dire de l'inclusion réciproque ?

Exercice n°16

1. Déterminer le rang de la famille suivante :

$$X_1 = (1, -1, 1), \quad X_2 = (-1, 1, -1), \quad X_3 = (0, 1, 1), \quad X_4 = (1, 0, 2).$$

2. Compléter en une base de \mathbb{R}^4 la famille (e_1, e_2) avec $e_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 1, -1, -1)$.

3. Dans \mathbb{R}^3 , soient $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, 2, 2)$ et $t = (2, 2, 2)$.

(a) Montrer que (u, v, w, t) est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

(b) En extraire une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice n°17 Soit

$$F = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) \mid f(0) = \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $C(\mathbb{R})$.

Exercice n°18 Déterminer un supplémentaire de

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 2x - y + 2z + t = 0\}$$

dans \mathbb{R}^4 .

Exercice n°19 Soit

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - z = t\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

2. Déterminer une famille génératrice de F .

Exercice n°20 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. La somme est-elle directe ?

2. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) \leq \dim(E)$. La somme est-elle directe ?

Exercice n°21 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que $H = F \oplus G$.

Exercice n°22 On note $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$. Donner une base de F et sa dimension.

Exercice n°23 On note $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$. Donner une base de G et sa dimension.

Exercice n°24

1. Montrer que les polynômes $P_1 = X$, $P_2 = X - 1$ et $P_3 = (X - 1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $P = 2X^2 - 5X + 6$ dans cette base.

Exercice n°25 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 0\}$ et

$$G = \{(a + b + c) - aX - bX^2 - cX^3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer une famille génératrice de G .
3. Déterminer $F \cap G$.

Exercice n°26 (oraux concours) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Étude de trois problèmes

Problème n°1

L'objet du problème est entre autre l'étude des deux sous-ensembles suivants du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$:

$$F = \{\alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P'(1) = 0\}.$$

1. Propriétés de F

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
- (b) Déterminer une base de F . En déduire $\dim(F)$.

2. Propriétés de G

- (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
- (b) Sans déterminer une base de G , justifier que $\dim(G) \leq 4$.
- (c) Montrer que la famille $(1, (X - 1)^2, (X - 1)^3, (X - 1)^4)$ est une famille libre de polynômes de G .
- (d) En déduire que $G = \text{Vect}(1, (X - 1)^2, (X - 1)^3, (X - 1)^4)$.

3. Propriétés de $F + G$

- (a) Exprimer $F + G$ comme un sous-espace vectoriel engendré.
- (b) En déduire que $F + G = \mathbb{R}_4[X]$.

4. Propriétés de $F \cap G$

- (a) Rappeler la formule liant $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F + G)$ et $\dim(F \cap G)$. En déduire $\dim(F \cap G)$.
- (b) Déterminer une base de $F \cap G$.

Problème n°2

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère les fonctions :

$$f_0 : x \mapsto 1, \quad f_1 : x \mapsto \sin(2x), \quad f_2 : x \mapsto \cos(2x).$$

Soit

$$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x + d\}.$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{U} = (f_0, f_1, f_2)$ est libre.
2. Écrire tout élément de E à l'aide des éléments de la famille \mathcal{U} .
3. Démontrer que E est un sous \mathbb{R} -espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. Donner une base de E .

Problème n°3 : Espace vectoriel des complexes

Dans \mathbb{C} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} , soit E l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ia$, $a \in \mathbb{R}$, et soit F l'ensemble des nombres complexes de la forme $b - ib$, $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2. Donner une base de E et une base de F .
3. En déduire une base de \mathbb{C} .