

Chapitre 14 : Applications linéaires

M. Calciano

I. Généralités

1) Définitions

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, une application $f : E \rightarrow F$ est dite linéaire si :

$$\forall (x, x') \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$$

On dit aussi que f est un morphisme d'espaces vectoriels.

Exemple :

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (2x + z, y)$. f est une application linéaire.
- Soit $g : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0), P(1))$. g est une application linéaire.

Une application linéaire de E vers \mathbb{K} est appelée une **forme linéaire**.

Exemple : Soit $\phi : \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$. ϕ est une forme linéaire.

2) Vocabulaire

Lorsque $E = F$, une application linéaire est appelée **endomorphisme**.

Si l'application linéaire est bijective, on parle d'**isomorphisme**.

Si l'endomorphisme est bijectif, on parle d'**automorphisme**.

Exemple : la dérivation $f \mapsto f'$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

3) Proposition

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E vers F est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Lorsque $E = F$, on note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ des endomorphismes de E .

4) Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ des applications linéaires.

Alors : la composée $g \circ f$ est une application linéaire.

Évidente en exploitant la linéarité de f et de g .

Si de plus, f est un isomorphisme de E dans F , son application réciproque est un isomorphisme de F dans E .

Soit f^{-1} l'application réciproque associée à f . Alors :

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = f^{-1}(\lambda f(x_1) + f(x_2)) = f^{-1}(f(\lambda x_1 + x_2)) = \lambda x_1 + x_2 = \lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2).$$

5) Proposition

L'ensemble des automorphismes de E est un groupe pour la composition.

On l'appelle le groupe linéaire et on le note $\text{GL}(E)$.

Il suffit de vérifier l'axiomatique de structure de groupe...

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$. Montrer que f est linéaire. Montrer que f admet une réciproque, donner son expression.

II. Images, noyaux

1) Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire. On définit :

- L'**image** de f comme le sous-ensemble de F , noté $\text{Im}(f)$, tel que

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

- Le **noyau** de f noté $\text{Ker}(f)$ défini par

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Exemple : Soit f définie par $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (-2x, y + 3z)$. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

2) Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

- Alors l'image directe par f d'un sous-espace de E est un sous-espace de F . En particulier $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- Alors l'image réciproque d'un sous-espace de F est un sous-espace de E . En particulier $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Montrons que $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E . D'abord : $0_E \in \text{Ker}(f)$ car $f(0_E) = 0_F$. Soit $x \in \text{Ker}(f)$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0_F$. Et pour $x, x' \in \text{Ker}(f)$, $f(x + x') = f(x) + f(x') = 0_F$.

3) Applications injectives/surjectives

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, une application $f : E \rightarrow F$ linéaire.

- f est dite **surjective** si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
- f est dite **injective** si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Montrons que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Si f est injective, et $f(x) = 0$, comme $f(0) = 0$, on a $f(x) = f(0)$ et par injectivité $x = 0$. Réciproquement, si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$, alors $f(x - x') = 0$ et $x - x' \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$, donc $x - x' = 0_E$, et $x = x'$.

Exemple : On considère l'application linéaire $\psi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P''$. Alors ψ est surjective mais n'est pas injective.

4) Projecteurs, symétries, homothéties

a) Définitions

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} , f un endomorphisme de E .

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , c'est-à-dire tels que $E = F \oplus G$.

On dit que f est le **projecteur** (ou la projection) sur F parallèlement à G si pour tout x de E , décomposé en $x_F + x_G$, on a $f(x) = x_F$.

On dit que f est la **symétrie** par rapport à F parallèlement à G si pour tout x de E , décomposé en $x_F + x_G$, on a $f(x) = x_F - x_G$.

On dit que f est l'**homothétie de rapport** λ (où λ est un scalaire) si pour tout x de E , on a $f(x) = \lambda x$.

b) Caractérisations des projecteurs

Soit f un endomorphisme de E , alors :

$$f \text{ est un projecteur si et seulement si } f^2 = f.$$

Remarque n°1 : f^2 désigne par abus de langage $f \circ f$.

Remarque n°2 : f est alors le projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

Remarque n°3 : On a alors : $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

Montrons que f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$. Si f projecteur, alors pour tout x de E , décomposé en $x_F + x_G$, on a $f(x) = x_F$ et $f^2(x) = f(x_F) = x_F$, donc $f^2(x) = f(x)$. Réciproquement, si pour tout x de E , $f^2(x) = f(x)$, alors $f(f(x) - x) = 0$, donc $f(x) - x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi : $x = x - f(x) + f(x)$ avec $x - f(x) \in \text{Ker}(f)$ et $f(x) \in \text{Im}(f)$.

c) Caractérisation des symétries

Soit f un endomorphisme de E , alors

$$f \text{ est une symétrie si et seulement si } f^2 = \text{Id}_E.$$

Remarque : f est alors la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

III. Cas de la dimension finie**1) Théorème dit de construction d'application linéaire**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, on suppose E de dimension finie.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Alors pour tous vecteurs y_1, \dots, y_p de F , il existe une application linéaire f de E dans F telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad f(e_i) = y_i.$$

2) Proposition

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, on suppose E de dimension finie.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

On note $\mathcal{L} = (f(e_1), \dots, f(e_p))$ l'image de \mathcal{B} par f .

- Alors f est injective si et seulement si \mathcal{L} est libre.
- Alors f est surjective si et seulement si \mathcal{L} est génératrice de F .
- Alors f est un isomorphisme si et seulement si \mathcal{L} est une base de F .

Montrons que f est injective si et seulement si \mathcal{L} est libre. Si f est injective. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ p scalaires de \mathbb{K} tels que :

$$\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_p f(e_p) = 0.$$

Alors $f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) = 0$, or f injective donc $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$, or (e_1, \dots, e_p) est une base de E , donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Réciproquement, si \mathcal{L} libre,

$$f(x) = 0 \iff f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) = 0 \iff \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_p f(e_p) = 0$$

d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et $x = 0$.

3) Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, on suppose E de dimension finie.

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

Alors, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie (même si F n'est pas de dimension finie). On appelle **rang** d'une application linéaire f , la dimension de l'espace $\text{Im}(f)$.

On note $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ (avec la proposition 4 qui suit...). On peut en extraire une base, et $\dim(\text{Im}(f))$ est donc finie.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, x + y, 2x + y + z)$. Alors $\text{rg}(f) = 2$.

4) Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire avec E de dimension finie.

Alors pour toute famille génératrice $(e_i)_{i \in I}$ de E , la famille $(f(e_i))_{i \in I}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\text{Im}(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$, alors $\exists x \in E$, $y = f(x)$, or $x \in E$, donc $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$ et $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_p f(e_p)$.

5) Théorème du rang

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire, alors :

$$\dim E = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

Comme E est de dimension finie, on peut considérer S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E . On montre que $\text{Im}(f)$ et S sont isomorphes, ils ont donc même dimension. Comme $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(S) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$.

Exemple : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P \mapsto (P(0), P(1))$.

Alors $\dim(\text{Ker}(f)) = n - 1$ et $\text{rg}(f) = 2$.

6) Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \rightarrow F$ linéaire.

- Alors si f est un isomorphisme, alors $\dim E = \dim F$.
- Alors si $\dim E = \dim F$, on a :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Il suffit de prendre une base (e_1, \dots, e_n) et de démontrer que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre et génératrice de F .

7) Définition

Le noyau d'une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$, et est appelé un **hyperplan**.

IV. Exercices

Exercice n°1 Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications telles que f est linéaire et surjective et $g \circ f$ est linéaire, montrer que g est linéaire.

Exercice n°2 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E .

Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont stables par g .

Exercice n°3 « hyper classique » Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E .

- 1) Quelle relation existe-t-il entre $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2)$?
- 2) Quelle relation existe-t-il entre $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f^2)$?
- 3) Montrer que $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.
- 4) Montrer que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \iff E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.
- 5) En déduire que :

$$[\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \text{ et } \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)] \iff E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f).$$

Exercice n°4 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E , tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$.

- 1) Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id_E .
- 2) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice n°5 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E , tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$.
- 2) Montrer que $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$.
- 3) Calculer $(g \circ f)^2$.
- 4) En déduire que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice n°6 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E , les vecteurs x et $f(x)$ soient colinéaires. Montrer que f est une homothétie.

Exercice n°7 Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P(X)) = (P(-1), P(0), P(1)).$$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 .

Exercice n°8 Dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathbb{K}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $F_1 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $F_2 = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

- 1) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E .
- 2) Vérifier qu'il existe un endomorphisme u de E tel que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, \quad u((a, b, 0)) = (-b, a, 0)$$

et

$$\forall c \in \mathbb{K}, \quad u((c, c, c)) = -(c, c, c).$$

- 3) Prouver que $u^4 = \text{Id}_E$.

Exercice n°9 Soient p et q deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) p et q sont deux projecteurs ayant même noyau.
- (ii) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Exercice n°10 Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire de \mathbb{R}^5 vers \mathbb{R}^3 dont le noyau soit une droite vectorielle.

Exercice n°11 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie paire ($n = 2p$).

Montrer que :

$$[f^2 = 0 \text{ et } \text{rg}(f) = p] \iff [\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)].$$

Exercice n°12 Soit un espace vectoriel de dimension finie, et soit u un endomorphisme de E . Montrer que $\text{rg}(u^2) = \text{rg}(u)$ si et seulement si $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice n°13 Soient E , F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

- 1) En appliquant la formule du rang à la restriction de v à $\text{Im}(u)$, montrer que

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(v \circ u) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(v)).$$

- 2) En déduire que

$$\text{rg}(v \circ u) \geq \text{rg}(v) + \text{rg}(u) - \dim(F).$$

Exercice n°14 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , et f un endomorphisme de E .

On suppose f nilpotent d'indice n (c'est-à-dire $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$).

Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E .

Exercice n°15 Soit $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$.

- 1) Montrer que p est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer $\text{Ker}(p)$.
- 3) L'application p est-elle injective ?
- 4) Déterminer $\text{Im}(p)$.
- 5) L'application p est-elle surjective ?
- 6) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$?
- 7) Est-ce que p est un projecteur de \mathbb{R}^3 ?

Exercice n°16 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , et u un endomorphisme de E .

- 1) Montrer qu'il existe $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, tel que $\text{Ker}(u^{p+1}) = \text{Ker}(u^p)$.
- 2) Montrer que $\forall k \geq p$, $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^p)$ et $\text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^p)$.
- 3) Montrer que $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.

Exercice n°17 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x - y - z, x + 2z)$.

- 1) Montrer que f est linéaire.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- 3) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- 4) A-t-on f endomorphisme injectif ? surjectif ?
- 5) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

Exercice n°18

- 1) Soient $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$, montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- 2) Soit l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$f(u_1) = (1, 2, 3), \quad f(u_2) = (3, 2, 1), \quad f(u_3) = (7, 2, -3).$$

- a) Déterminer une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
 - b) Déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$.
- 3) Déterminer $\text{Ker}(f)$.

Exercice n°19 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $f : E \rightarrow E$, définie par $f(P(X)) = P(X) + (1 - X)P'(X)$.

- 1) Montrer que f est linéaire.
- 2) Donner une base de $\text{Ker}(f)$.
- 3) Donner une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice n°20 (oraux concours) On munit \mathbb{R}^3 de sa base canonique et on considère les applications f et g définies par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x - y + z \\ 3x + y + z \\ 2x + y + 2z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6x + 18y - 12z \\ -2x - 6y + 4z \\ -3x - 9y + 6z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
2. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$ ainsi qu'une base de $\text{Im}(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(g)$.
4. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
5. Que peut-on en déduire ?
6. Montrer que $f \circ g$ est un endomorphisme nilpotent.

Exercice n°21 (lycée Wallon)

1. Montrer que $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un plan vectoriel.
2. Soient $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et la droite vectorielle $D = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\vec{e}_1)$.
Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^3 .
3. Soit $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la projection sur P parallèlement à D .
Déterminer l'expression de $p(\vec{u})$ quel que soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Comment en déduire la projection q sur D parallèlement à P ?
4. Déterminer la symétrie $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par rapport à D parallèlement à P .