Chapitre 10 : Nombres réels et suites

I. Les réels

1) Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$

La borne supérieure de A est, s'il existe, le plus petit des majorants de A.
Elle se note sup A

La borne inférieure de A est, s'il existe, le plus grand des minorants de A.
Elle se note inf A

Remarque : Si les réels infA et supA existent alors inf A$\leq$sup A

Attention : Ne pas confondre les notions de plus grand élément de A (noté max A) et de borne supérieure de A.
Si A possède un plus grand élément alors sup A = max A, par contre si A possède une borne supérieure : sup A, on n'a pas nécessairement de plus grand élément.
Ex :]0 ;1[
La remarque reste valable pour inf A et min A.

2) Propriétés (admises)

Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée possède sa borne supérieure
Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée possède sa borne inférieure

Ex : L'intervalle I =]a ;b[(pour a et b réels) admet a comme borne inférieure et b comme borne supérieure.

3) Théorème

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et M un réel, alors on a M = sup A si et seulement si : $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{M}$ ***et*** $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{M} - \boldsymbol{\varepsilon} < \boldsymbol{x}$

De même :
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et m un réel, alors on a m=inf A si et seulement si : $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{x}$ ***et*** $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{x} < \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\varepsilon}$

Démonstration :
Le premier point précise que « a » est un majorant et le second point que c'est le plus petit…
Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon < x$

Exemple : Quelle est la borne inférieure de A={2^{-n}, n$\in \mathbb{N}$} ?

4) Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties I de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in I, \forall y \in I, [x; y] \subset I$

Démonstration : Clairement si I intervalle alors I vérifie $\forall x \in I, \forall y \in I, [x; y] \subset I$
Supposons que I vérifie : $\forall x \in I, \forall y \in I, [x; y] \subset I$
Soit a et b les bornes inférieure et supérieure de I, éventuellement a=-∞ et b=∞
Alors I est de la forme (a,b) (la parenthèse correspondant à un crochet ouvert ou fermé)

5) Densité

Soient x et y deux réels tels que x<y :
Il existe un nombre rationnel r dans l'intervalle]x ;y[
Il existe un nombre irrationnel ξ dans l'intervalle]x ;y[

Remarque : Cela permet de construire $\mathbb{R}$ comme « une extension de $\mathbb{Q}$ »
On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

II. Les suites

1) Définition

On appelle suite de nombres réels, toute fonction u : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
Dans ce cas, on note pour tout entier n : $u_n = u(n)$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Notation : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.

2) Suites réelles et ordre

Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
On dit que u est minorée, majorée ou bornée si A = $\{u_n \in \mathbb{R}, n\in \mathbb{N}\}$ l'est !
On dit que u est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
On dit que u est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$
On dit que u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

3) Définition :

Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Si u est minorée, la borne inférieure de u est : $inf_{n\in\mathbb{N}}\, u_n = \inf \{u_n \in \mathbb{R}, n\in \mathbb{N}\}$
Si u est majorée, la borne supérieure de u est : $sup_{n\in\mathbb{N}}\, u_n = \sup \{u_n \in \mathbb{R}, n\in \mathbb{N}\}$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+3}$ pour n$\in \mathbb{N}$,
Alors u_n est minorée par 0, $inf_{n\in\mathbb{N}}\, u_n = 0$ et $sup_{n\in\mathbb{N}}\, u_n = \frac{1}{3}$

4) Suites extraites

Soit u et v deux suites, on dit que v est une suite extraite de u s'il existe une fonction $\boldsymbol{\varphi}$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{u_{\varphi(n)}}$

Remarque : La fonction $\boldsymbol{\varphi}$ vérifie nécessairement : $\boldsymbol{\varphi}$(n)≥n

Démonstration : Evidente par récurrence !

5) Limite

Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l un réel
-on dit que u converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$
-on dit que u diverge vers +∞, $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow A \leq u_n)$
-on dit que u diverge vers -∞, $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq A)$

6) Théorème dit de « l'unicité de la limite »

Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, (l ;l')$\in \overline{\mathbb{R}}^2$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$, alors l = l'

Démonstration :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_1 \Longrightarrow |u_n - l'| \leq \varepsilon)$
En particulier pour $\varepsilon/2$, *et* $n \geq max(n_0;n_1)$, $|u_n - l| \leq \varepsilon/2$ *et* $|u_n - l'| \leq \varepsilon/2$
Or $|l-l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq \varepsilon$, *en faisant tendre* ε *vers 0,* $l = l'$

7) Limites et inégalités
Soient u et v deux suites de réels convergentes
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow u_n < v_n$

Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Attention : Lors d'un « passage à la limite », une inégalité même stricte conduit à une inégalité large.

8) Proposition :
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration : En appelant l la limite, on a : u converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$
Pour $\varepsilon = 1$, *on a :* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq 1)$, *pour* $n \geq n_0$, $u_n \leq 1+l$
Il suffit de prendre $max(u_0,\ldots,u_{n0};1+l)$

Remarque : La réciproque est fausse, penser, par exemple, à $u_n = (-1)^n$

9) Théorèmes
   a) Suites extraites d'une suite convergente
   Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l un réel, si u converge vers l alors toute suite extraite de u converge vers l.

   Démonstration : En appelant l la limite, on a : u converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ *avec* $\varphi(n) > n$
   Donc : $\varphi(n) > n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$ *et* v_n *converge vers l.*

   b) Proposition
   Soit f : I→ $\mathbb{R}$, une fonction définie dans un intervalle I, a un point de I ou une extrémité de I.
   L$\in \overline{\mathbb{R}}$
   u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$

   Démonstration :
   $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon)$
   Et : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-L| \leq \varepsilon$
   D'où la conclusion !

c) Opérations sur les limites

Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, v$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(L ; L') $\in \overline{\mathbb{R}}^2$

Soit α un réel non nul

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |L|$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = LL'$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = L + L'$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha u_n = \alpha L$

Alors, si L≠0, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/ u_n = 1/L$

Alors, si L = 0^+, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/ u_n = +\infty$

Il peut être judicieux de se souvenir des tableaux de limites vus en terminale :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Indéterminée

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	Indéterminée

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	Indéterminée	Indéterminée

Exemple : Montrer que la suite $u_n = n^2$-$n\cos(n)$ diverge.

d) Comparaison

Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, v$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, w$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

On suppose que u et w convergent vers L et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$

Alors v est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$

Démonstration :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_1 \Longrightarrow |w_n - a| \leq \varepsilon)$

Ainsi, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, $|v_n - a| \leq \max(|u_n - a|, |w_n - a|) \leq \varepsilon$

e) Théorème

Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, v$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Si $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Si $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq |u_n|}$

Alors, v est convergente et sa limite est 0.

Démonstration : On a $-u_n \leq v_n \leq u_n$ *et on applique le théorème d'encadrement.*

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \infty$
Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
Alors, v est divergente et sa limite est ∞

f) Théorèmes de la limite monotone
Soit u$\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, monotone, alors u est convergente si et seulement si u est bornée

Si u est croissante, et majorée alors u est convergente
Si u est croissante, non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$

Si u est décroissante et minorée alors u est convergente
Si u est décroissante et non minorée, alors u diverge vers $-\infty$

Démonstration : Montrons que si u est croissante, et majorée alors u est convergente.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
De plus : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
Soit $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ *est une partie non vide de* $\mathbb{R}$, *et majorée, donc elle admet une borne supérieure notée L.*
Et : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, L-\varepsilon < u_N < L$
Comme u_n *est croissante,* $\forall n \geq N$, $L-\varepsilon < u_N \leq u_n < L$, *donc* u_n *converge vers L*

10) Suites adjacentes
a) Définition
Deux suites u et v sont dites adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante, et si (u_n-v_n) converge vers 0.

b) Théorème
Si u et v sont deux suites adjacentes, alors u et v sont convergentes et de même limite L.
Et si u est croissante (et donc v décroissante) : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_n \leq L \leq v_p$

Démonstration : Si u est croissante et v décroissante, alors : nécessairement $u_n \leq v_n$
Et : $u_n \leq v_n \leq v_0$ *donc* u_n *converge*
De même, v_n *converge*
Comme $(u_n - v_n)$ *converge vers 0, on a* u_n *et* v_n *ont même limite.*

Exemple : On souhaite montrer que la suite u définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente.
On introduit à cette fin la suite v définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$
Montrer que u et v sont adjacentes et conclure !

c) Théorème de Bolzano-Weierstrass (admis)
De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge.

III. Suites récurrentes

1) Théorème-Définition

Soit f une fonction de I dans I (I désigne un intervalle) et a un réel de I.
Il existe une unique suite u telle que :
Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = a$

Remarque : la fonction f est appelée fonction itératrice

Remarque n°2
Si f : x→x+c alors u est arithmétique de raison c
Si f : x→ ax alors u est géométrique de raison a
Si f : x→ ax+c alors u est arithmético-géométrique.

2) Théorème

Pour une suite telle que définie au 1), si l'itératrice est monotone alors :
Si f est croissante, alors u est monotone.
Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

Démonstration : En exercice !

3) Théorème

Pour une suite telle que définie au 1), si l'itératrice est continue alors :

Si u converge vers L dans I, alors L est solution de l'équation f(x) = x

Remarque : Les solutions de l'équation de f(x) = x sont appelés points fixes de f.

Démonstration : u_{n+1} et u_n ont la même limite, donc L vérifie f(x) = x

4) Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2

a) Définition

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est une suite, réelle ou complexe, vérifiant une relation de récurrence du type :$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (a et b sont deux constantes et b ≠0)

Remarque : L'équation x^2-ax-b = 0 est appelée équation caractéristique de la relation récurrente.

b) Théorème (cas complexe)

Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors les suites complexes solutions sont de la forme : $\alpha_1(r_1)^n + \alpha_2(r_2)^n$ avec α_1 et α_2 deux complexes.
Sinon, si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les suites complexes solutions sont de la forme : $\alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ avec α_1 et α_2 deux complexes.

Démonstration : Clairement les suites proposées sont solutions. Mais y-en-a-t-il d'autres ?
Soit v_n une autre solution.

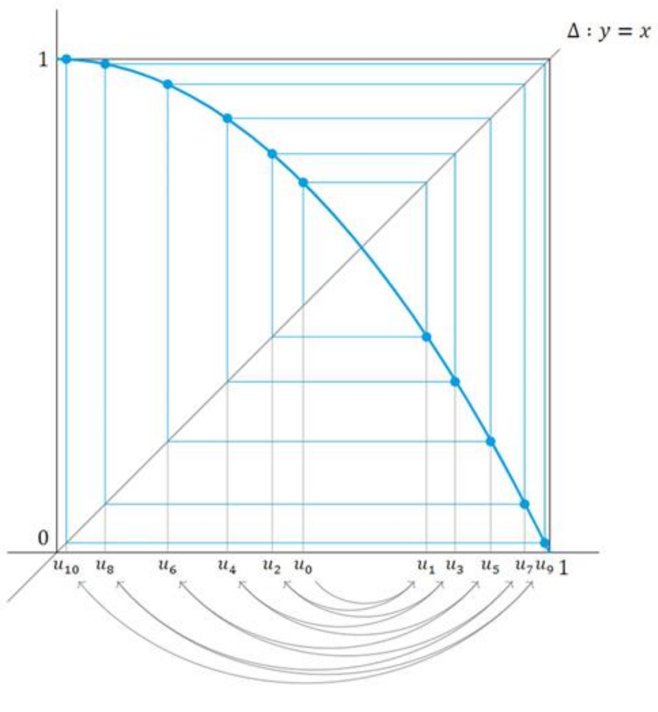
Mais si $v_0 = u_0$ et $v_1=u_1$ alors $u_n = v_n$
En effet :
Par récurrence, Soit P_n : « $u_n = v_n$ »
P_0 et P_1 sont vraies.
Si P_n est vraie, alors $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} = av_n+bv_{n-1} = v_{n+1}$

c) Théorème (cas réel)
Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors les suites réelles solutions sont de la forme : $\alpha_1 {r_1}^n + \alpha_2 {r_2}^n$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les suites réelles solutions sont de la forme : $\alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Si l'équation caractéristique ne possède aucune solution réelle, alors en notant l'une des deux solutions complexes sous la forme $r = \rho e^{i\theta}$ alors les solutions réelles sont de la forme : $\rho^n(\alpha_1\cos(n\theta) + \alpha_2\sin(n\theta))$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Exemple : Soit la suite de Fibonacci définie par : $F_0 = 0$, $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, donner l'expression de F_n en fonction de n.



Représentation graphique de la suite u définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf. exercice n° 6).