Chapitre 16 : Relations de comparaison

M. Calciano

I. Comparaison locale des fonctions

1) Définitions « théoriques »

Soit f et g deux fonctions de $I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{+\infty\}$.

- On dit que f est **dominée par** g **au voisinage de** a, et on note $f = O_a(g)$, s'il existe un voisinage ν de a dans I et une fonction $\varphi : \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x de ν, $f(x) = \varphi(x)g(x)$ et telle que φ soit bornée.
- On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** a, et on note $f = o_a(g)$, s'il existe un voisinage ν de a dans I et une fonction $\varphi : \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x de ν, $f(x) = \varphi(x)g(x)$ et telle que $\lim\limits_{x \to a} \varphi = 0$.
- On dit que f **est équivalente à** g **au voisinage de** a, et on note $f \sim_a g$, s'il existe un voisinage ν de a dans I et une fonction $\varphi : \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x de ν, $f(x) = \varphi(x)g(x)$ et telle que $\lim\limits_{x \to a} \varphi = 1$.

Exemples :

1. $x^2 = o_0(x)$
2. $(x-5)^2 = o_5(x-5)$
3. $2x^2 = O_0(x^2)$

Remarques :

- Si $f = o_a(1)$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
- $f = o_a(0)$ ou $O_a(0)$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a.
- $f = o_a(1)$ ou $O_a(1)$ si et seulement si f est bornée.

2) Définitions « pratiques »

Soit f et g deux fonctions de $I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{+\infty\}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$ et que f et g sont continues en a si $a \in I$. Alors :

- f est dominée par g au voisinage de a, $f = O_a(g)$, si et seulement si f/g est bornée au voisinage de a.
- f est négligeable devant g au voisinage de a, $f = o_a(g)$, si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f/g = 0$.
- f est équivalente à g au voisinage de a, $f \sim_a g$, si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f/g = 1$.

Démonstration : Revenir aux définitions !

Exercice : Montrer que $\sin(x) \sim_0 x$ puis que $x + e^x \sim_{+\infty} e^x$.

3) Proposition

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction définie sur un voisinage de a. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$, alors $f \sim_a L$.

Remarque : Ce résultat est problématique pour $L = 0$; en effet, la fonction f serait alors identiquement nulle sur tout un voisinage de a.

4) Proposition

Autre formulation de l'équivalence : Soit f et g deux fonctions de $I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{+\infty\}$, alors

$$f \sim_a g \iff f - g = o_a(g)$$

Démonstration : Si $f \sim_a g$ alors il existe un voisinage ν de a dans I et une fonction $\varphi : \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x de ν, $f(x) = \varphi(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varphi = 1$.

Donc, sur ce voisinage : $f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = (\varphi(x) - 1)g(x)$.

Or $\lim\limits_{x \to a} (\varphi(x) - 1) = 0$, donc $f - g = o_a(g)$.

Réciproquement, si $f - g = o_a(g)$, alors il existe un voisinage ν de a dans I et une fonction $\varphi : \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x de ν, $f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varphi = 0$.

Et $f(x) = \varphi(x)g(x) + g(x) = (\varphi(x) + 1)g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} (\varphi(x) + 1) = 1$, donc $f \sim_a g$.

5) Quelques propriétés des o et O

Produit : Si $f_1 = O(g_1)$ et $f_2 = O(g_2)$ alors $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.

Et, si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

Somme : Si $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g)$ alors $f_1 + f_2 = O(g)$.

Et, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$.

Transitivité : Si $f_1 = O(g_1)$ et $g_1 = O(g_2)$ alors $f_1 = O(g_2)$.

Et, si $f_1 = o(g_1)$ et $g_1 = o(g_2)$ alors $f_1 = o(g_2)$.

Exercice :

1) Justifier que :
   a) $O(1) + o(1) = O(1)$
   b) $O(1) - O(1) = O(1)$
   c) $o(2x) = o(x)$
2) Simplifier au maximum (sans perte de précision) :
   a) $1 + 2x - x^2 + o_0(x)$
   b) $5x^5 - 3x^2 + o_0(x^3)$

6) Propriétés des fonctions équivalentes

Soit f et g deux fonctions de $I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{+\infty\}$, telles que $f \sim_a g$.

a) Théorème dit des limites : $\forall L \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Démonstration : Conséquence immédiate de $f(x) = \varphi(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varphi = 1$.

b) Proposition : On a $f > 0$ au voisinage de a si et seulement si $g > 0$ au voisinage de a.

Démonstration : $f(x) = \varphi(x)g(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varphi = 1$, donc f et φ sont strictement positives sur un voisinage de a, et par la règle des signes, g également.

7) Opérations compatibles avec une relation d'équivalence

Soit f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions de $I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{+\infty\}$, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

On suppose que $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$. Alors :

- $f_1(x)g_1(x) \sim_a f_2(x)g_2(x)$.
- Si de plus g_1 ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$, alors $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim_a \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$.
- Si de plus $f_1 > 0$ sur $I \backslash \{a\}$, alors $f_1^\alpha(x) \sim_a f_2^\alpha(x)$.

Attention : de façon générale, la somme des équivalents n'est pas un équivalent de la somme ! Ainsi, pour des fonctions g_1 et g_2 ne s'annulant pas, on peut avoir $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \to 1$ et $\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} \to 1$ sans pour autant avoir $\dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} \to 1$.

Illustration : Montrer que $1 + x \sim_0 1$. A-t-on $(1 + x) - 1 \sim_0 1 - 1$, c'est-à-dire $x \sim_0 0$?

Remarque : dans un calcul d'équivalent, il peut être utile de remplacer la relation $f \sim_a g$ par $f(x) = g(x) + o(g(x))$. On pourra ainsi additionner de telles égalités !

Exemple :

- Montrer que $\sin(5x) \sim_0 5x$.
- Montrer que $\text{sh}(2x) \sim_0 2x$.
- Traduire les deux équivalents précédents par des égalités.
- En déduire que $\sin(5x) - \text{sh}(2x) \sim_0 3x$.
- Reprendre l'exercice précédent pour $f(x) = \sin(2x) - \text{sh}(2x)$. Pourquoi n'obtenons-nous pas mieux que $f(x) = o_0(x)$? (Cela encourage à développer et à employer un outil plus puissant : les formules de Taylor-Young.)

Remarque n°2 : il n'y a aucun rapport entre $f \sim_a g$ et $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = 0$.

Ainsi : $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right) = 0$ et pourtant $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1/x^2} = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$.

Ou encore : $x^2 + 5 \sim_{+\infty} x^2$ mais $\lim_{x \to \infty} \left[(x^2 + 5) - x^2\right] = 5$.

8) Théorème

Soit f_1, f_2 des fonctions de $I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{+\infty\}$. Si $f_2(x) = o_a(f_1(x))$, alors $f_1(x) + f_2(x) \sim_a f_1(x)$.

Démonstration : On a $f_2(x) = \varphi(x)f_1(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

On en déduit que $f_1(x) + f_2(x) = f_1(x) + \varphi(x)f_1(x) = (\varphi(x) + 1)f_1(x)$ avec $\lim_{x \to a} (\varphi(x) + 1) = 1$.

9) Théorème dit de composition « à droite »

Soit f et g des fonctions de $J \to \mathbb{R}$, $b \in \overline{J} \cup \{+\infty\}$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{+\infty\}$, telle que $h(I) \subset J$.

Si $\lim_{x \to a} h(x) = b$ et $f(y) \sim_b g(y)$, alors $f \circ h(x) \sim_a g \circ h(x)$.

Par exemple : $\text{sh}(x^2) \sim_0 \sin(x^2)$.

Démonstration : Si $\lim_{x \to a} h(x) = b$, *alors* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |h(x) - b| < \varepsilon$.

Comme $f(y) \sim_b g(y)$, *il existe un voisinage* ν *de* b *dans* J *et une fonction* $\varphi : \nu \to \mathbb{R}$ *vérifiant, pour tout* y *de* ν, $f(y) = \varphi(y)g(y)$ *et* $\lim_{y \to b} \varphi = 1$.

Pour η *suffisamment petit,* $h(x)$ *sera dans* ν, *donc* $f(h(x)) = \varphi(h(x))g(h(x))$ *et* $\lim_{x \to a} \varphi \circ h(x) = 1$.

Attention : ce théorème est en général faux pour la composée *à gauche*. Ainsi, $f(y) \sim_b g(y) \not\Rightarrow h \circ f(x) \sim_a h \circ g(x)$.

En effet, $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$, et pourtant $\exp(x^2 + x)$ est-il équivalent à $\exp(x^2)$?

Remarque importante

Composition à gauche par le logarithme ou l'exponentielle. La composition d'un équivalent par une fonction extérieure (composition « à gauche ») ne préserve pas l'équivalence en général : il faut impérativement distinguer le cas du logarithme de celui de l'exponentielle.

- **Avec l'exponentielle :** si $f \sim_a g$, on n'a *pas* en général $e^f \sim_a e^g$. En effet, $\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)}$, et $f \sim_a g$ donne seulement $f - g = o_a(g)$, ce qui n'entraîne pas $f(x) - g(x) \to 0$. C'est exactement l'exemple ci-dessus : $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$ mais $(x^2 + x) - x^2 = x \to +\infty$, donc $e^{x^2+x}/e^{x^2} = e^x \to +\infty$: l'équivalence est détruite par passage à l'exponentielle.
- **Avec le logarithme :** la situation est différente lorsque f et g sont à valeurs strictement positives et *tendent vers* $+\infty$ en a : on a alors $f \sim_a g \Rightarrow \ln f \sim_a \ln g$ (voir Exercice n°6). L'idée est que $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1 + \dfrac{\ln(f(x)/g(x))}{\ln g(x)}$, et comme $f(x)/g(x) \to 1$, le numérateur $\ln(f(x)/g(x)) \to 0$ tandis que le dénominateur $\ln g(x) \to +\infty$: le quotient tend donc vers 1. Ce résultat tombe en revanche en défaut si f et g ne tendent pas vers $+\infty$ (par exemple si $f, g \to 1$, $\ln f$ et $\ln g$ tendent vers 0 et l'argument précédent ne s'applique plus).

En résumé : on ne compose jamais librement un équivalent par une fonction extérieure. Le passage au logarithme est licite sous l'hypothèse de divergence vers $+\infty$; le passage à l'exponentielle, lui, n'est licite sous *aucune* hypothèse générale et doit toujours être justifié au cas par cas (ou évité, par exemple via une mise en facteur exponentielle dominante, ou un développement asymptotique).

10) Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable en $a \in I$. Alors, si $f'(a) \neq 0$, $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$.

Démonstration : Si f *est dérivable en* a, *alors* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Donc, comme $f'(a) \neq 0$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)f'(a)} = 1$.

Soit $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)f'(a)}$ *: on a* $\lim_{x \to a} \varphi = 1$ *et* $f(x) - f(a) = \varphi(x)f'(a)(x - a)$.

11) Comparaison de fonctions usuelles

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^{*+})^3$ tels que $\alpha < \beta$ et $\gamma > 1$.

- Au voisinage de 0 : $(\ln |x|)^\alpha = o_0(1/x^\alpha)$ et $x^\beta = o_0(x^\alpha)$.
- Au voisinage de $\pm\infty$: $(\ln x)^\gamma = o_{+\infty}(x^\alpha)$ et $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$.

12) Equivalents classiques en 0

- $\sin(x) \sim_0 x$, de même $\mathrm{sh}(x) \sim_0 x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$
- $1 - \cos(x) \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$, de même $\mathrm{ch}(x) - 1 \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \sim_0 x$
- $\tan(x) \sim_0 x$
- $e^x - 1 \sim_0 x$

Démonstrations : voir cours de terminale !

Remarque : les formules $e^x - 1 \sim_0 x$ et $e^x \sim_0 x + 1$ sont deux choses vraies, mais bien différentes ! La première donne la vitesse à laquelle e^x converge vers 1, tandis que la seconde se contente de dire que e^x converge vers 1.

13) Equivalent d'un polynôme

Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_n x^n$ avec $d \leq n$.

- Au voisinage de 0 : $P(x) \sim_0 a_d x^d$ (monôme de plus bas degré).
- Au voisinage de $\pm\infty$: $P(x) \sim_{\pm\infty} a_n x^n$ (monôme dominant).

Démonstration : Factorisation par le terme monôme dominant.

II. Relations de comparaison des suites

1) Définitions

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels non nuls à partir d'un certain rang n_0.

- On dit que u est dominée par v, et on note $u_n = O(v_n)$, si la suite u_n/v_n est bornée.
- On dit que u est négligeable devant v, et on note $u_n = o(v_n)$, si la suite u_n/v_n converge vers 0.
- On dit que u est équivalente à v, et on note $u_n \sim v_n$, si la suite u_n/v_n converge vers 1.

Remarques :

- (u_n) est bornée si, et seulement si, $u_n = O(1)$.
- (u_n) converge vers 0 si, et seulement si, $u_n = o(1)$.

Exemple : on a $\dfrac{4n+1}{n^2+3} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2) Caractérisation de l'équivalence

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels non nuls à partir d'un certain rang n_0. Alors

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

Démonstration : *Même principe que pour les fonctions.*

3) Propriétés

Soit $u_n \sim v_n$.

Théorème dit des limites : $\forall L \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \iff \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Proposition : à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont le même signe.

4) Théorème

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v' = (v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n/u'_n \sim v_n/v'_n$.
- Si $u_n > 0$ et $u_n \sim v_n$ alors $(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$ pour α réel.
- Si $v_n = o(u_n)$ alors $u_n + v_n \sim u_n$.

5) Comparaison de suites classiques

Soit α, β, γ trois réels tels que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 1$. Alors

$$(\ln(n))^\alpha = o(n^\beta), \qquad n^\beta = o(n^\gamma), \qquad n^\gamma = o(n!)$$

6) Equivalents usuels

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et si α désigne un réel :

- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
- $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$

7) Formule de Stirling

On a : $n! \sim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

8) Proposition

Soit f et g deux fonctions définies sur I, et (u_n) une suite à valeurs dans I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

- Si $f = O_a(g)$ alors $f(u_n) = O_{n\to+\infty}(g(u_n))$.
- Si $f = o_a(g)$ alors $f(u_n) = o_{n\to+\infty}(g(u_n))$.
- Si $f \sim_a g$ alors $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} g(u_n)$.

Démonstration : *Montrons que si $f = O_a(g)$ alors $f(u_n) = O_{n\to+\infty}(g(u_n))$.*

Si $f = O_a(g)$, alors il existe un voisinage ν de a dans I et une fonction $\varphi : \nu \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x de ν, $f(x) = \varphi(x)g(x)$ et telle que φ soit bornée.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - a| \leq \varepsilon$.

Pour N assez grand, u_n est dans ν, et $f(u_n) = \varphi(u_n)g(u_n)$ avec $\varphi(u_n)$ bornée.

Remarque importante

Pour aller plus loin (hors-programme).
Si $f \sim_a g$, a-t-on $f' \sim_a g'$, sous réserve de dérivabilité de f et de g ? Non. Par exemple, si $f(x) = x + \sin(x)$ et $g(x) = x$ au voisinage de 0.
Et pour leurs primitives ? C'est à nuancer (vrai pour les intégrales dites divergentes, vues en deuxième année), mais en général ce sera faux : par exemple si $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = 1$ au voisinage de 0.

III. Exercices

Exercice n°1

Montrer que $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) =_{x\to0} o(x)$.

Exercice n°2

Donner un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 3}$.

Exercice n°3

Donner un équivalent de $\dfrac{(e^x - 1)^2}{(1+x)^5 - 1}$ au voisinage de 0.

Exercice n°4

Donner un équivalent en 0 de $\mathrm{ch}(x) - \cos(x)$.

Exercice n°5

Trouver un équivalent simple de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Exercice n°6

Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives tendant vers $+\infty$ en a, et telles que $f \sim_a g$. Montrer que $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.

Exercice n°7

Déterminer, à l'aide d'équivalents, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4}$

Exercice n°8

1) Pour k entier naturel non nul, montrer que $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

2) En déduire un équivalent simple de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice n°9

Soit u une suite décroissante de limite 0 telle que $u_n + u_{n+1} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

1) On note $a_n = n(u_n + u_{n+1})$. Montrer que la suite a est convergente et déterminer sa limite.

2) Montrer que, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on a $a_n \leq 2nu_n \leq \dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$.

3) Conclure !

Exercice n°10

Montrer que $E(x) \sim_{+\infty} x$.

Exercice n°11

Trouver un équivalent en 0 de $x \mapsto \cos(\sin x)$.

Exercice n°12

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln(x^2+1) - \ln x$.

Exercice n°13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution u_n dans $[1, +\infty[$.

2) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3) Montrer que $u_n \sim n$ et que $u_n - n \sim \ln n$.

Exercice n°14

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et à valeurs réelles, telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On suppose que $g = o_{+\infty}(f)$. Montrer que $\exp(g) = o_{+\infty}(\exp(f))$.

Exercice n°15

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}\,dx$.

1) Par une majoration de $x \mapsto e^{-2x}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
2) En déduire que $I_n = o(1)$.
3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
4) En déduire la limite de nI_n.
5) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I_n = \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
6) Déterminer la limite de $n(nI_n - 1)$.
7) En déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $I_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice n°16

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, avec $b > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Démontrer que la suite est monotone à partir d'un certain rang.