

Chapitre 17 : Calcul différentiel

M. Calciano

I. Dérivée en un point

1) Définition :

On dit que f est dérivable en a lorsque le rapport :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{défini pour } x \neq a, \quad \text{admet une limite finie quand } x \text{ tend vers } a.$$

Lorsque cette limite existe, on appelle nombre dérivé en a , et on note $f'(a)$ ou $D(f)(a)$ cette limite.

On remarque que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Exemple : $x \rightarrow \sqrt{x}$ est définie sur $]0; +\infty[$ mais dérivable sur $]0; +\infty[$.

2) Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , f est dérivable en a si et seulement s'il existe d réel et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = f(a) + d(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque : Dans ce cas, $f'(a) = d$.

Démonstration :

Si $f(x) = f(a) + d(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$, alors clairement $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = d$.

Réciproquement :

Soit $\varepsilon(x) : \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - (x - a)f'(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a bien $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

3) Théorème

Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Démonstration :

évident avec : $f(x) = f(a) + d(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice :

Soit la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

Montrer que g est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

4) Proposition

Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse a . C'est la droite d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

5) Définition

On dit que f est **dérivable à droite** en a si le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, défini pour $x \neq a$, admet une limite finie quand x tend vers a avec $x > a$.

Cette limite s'appelle le nombre dérivé à droite et se note $f'_d(a)$.

De la même façon, on définit la **dérivée à gauche en a** , notée $f'_g(a)$.

6) Proposition

Si f est définie au voisinage d'un réel a , de la forme $]a - \eta; a + \eta[$ avec $\eta > 0$.

Alors : f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.

7) Opérations algébriques sur les fonctions dérivables :

On suppose que f et g sont deux fonctions définies au voisinage d'un réel a et dérivables en a .

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors : la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

Alors : la fonction $f \times g$ est dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$.

Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration :

Pour le produit : $(f \times g)(a + h) - (f \times g)(a) = (f(a + h)) \times (g(a + h)) - (f(a) \times g(a))$.

On a : $(f \times g)(a + h) - (f \times g)(a) = f(a + h)g(a + h) - f(a + h)g(a) + f(a + h)g(a) - f(a)g(a) = f(a + h)(g(a + h) - g(a)) + g(a)(f(a + h) - f(a))$.

Et : $\frac{(f \times g)(a + h) - (f \times g)(a)}{h} = f(a + h) \frac{g(a + h) - g(a)}{h} + g(a) \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \dots$

Pour l'inverse : $\frac{1}{f(a + h)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(a + h)}{f(a)f(a + h)} \dots$ *Pour le quotient : le transformer en produit...*

8) Théorème de composition

Si f est une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$.

Démonstration :

Posons $b = f(a)$, $g(y) - g(b) = g'(b)(y - b) + (y - b)\varepsilon(y)$ avec $\lim_{y \rightarrow b} \varepsilon(y) = 0$.

Donc, $g(f(x)) - g(f(a)) = g'(f(a))(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon(f(x))$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(f(x)) = 0$.

Il reste simplement à diviser par $x - a$...

II. Dérivée sur un intervalle et les théorèmes classiques

Ici I désigne un intervalle de \mathbb{R} et les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{R} .

1) Définition

On dit que f est dérivable sur I , si f est dérivable en tout point de I .

Si f est dérivable sur I , alors la fonction $I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f .

La fonction dérivée est notée f' ou $D(f)$ ou $\frac{df}{dx}$.

Remarque : pour un intervalle fermé en a , la dérivabilité en a se résume à la dérivabilité à gauche ou à droite de a , selon laquelle des deux extrémités correspond « a ».

2) Opérations algébriques

On suppose que f et g sont deux fonctions dérivables sur I . Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors : la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I .

Alors : la fonction $f \times g$ est dérivable sur I . Et si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I .

3) Dérivation d'une composée

Si f est dérivable sur I , et g dérivable sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I , et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

4) Dérivabilité de la réciproque

Soit f une fonction strictement monotone de I sur J et dérivable sur I .

Si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque : Si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$ et la courbe représentative de f^{-1} admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a .

Démonstration :

$\frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{b+h-b}$ est l'inverse de $\frac{b+h-b}{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)} = \frac{f(f^{-1}(b+h)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}$, or f^{-1} est continue du fait que f est une fonction strictement monotone de I sur J et dérivable sur I .

Exercice :

Justifier que la fonction $x \rightarrow x^3 \ln(\sin x)$ est dérivable sur $]0; \pi[$ et déterminer l'expression de la dérivée.

5) Proposition

Ici a et b désignent deux réels tels que $a < b$, les fonctions sont toujours à valeurs dans \mathbb{R} .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I , et $a \in \overset{\circ}{I}$ un point intérieur à I .

Si f présente un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

La réciproque est fautive : une fonction peut admettre un extremum local en a et ne pas être dérivable en a : $x \rightarrow |x|$ atteint son minimum en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

La condition $f'(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante d'existence d'un extremum ! $h : x \rightarrow x^3$ n'a pas d'extremum en 0, pourtant $h'(0) = 0$.

Démonstration :

On a : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Supposons que $f(a)$ soit un maximum local. Pour $h > 0$, $f(a+h) \leq f(a)$, donc $f'(a)h \leq 0$ et $f'(a) \leq 0$.

Pour $h < 0$, $f(a+h) \leq f(a)$, donc $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) = 0$.

6) Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

Comme f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Si les maximum et minimum sont atteints en a et b , alors f est constante car $f(a) = f(b)$. Sinon les extrema sont atteints dans l'intérieur de I , et donc il existe c dans l'intérieur tel que $f'(c) = 0$.

7) Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Démonstration :

Soit $g(t) = f(t) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) \right)$.

On a g dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, $g(a) = g(b) = 0$.

Par le théorème de Rolle, il existe c dans $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0 \dots$

8) Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de $]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Démonstration :

Soit $y < z$ dans $]a, b[$, on applique le théorème des accroissements finis : il existe x dans $]y, z[$ tel que $\frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(x)$, et on a : $m \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq M$.

Soit : $m(z - y) \leq f(z) - f(y) \leq M(z - y) \dots$

Exemple : On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction $x \rightarrow \ln(2+x)$.

Montrer que f est C^1 sur $[0, 2]$ et que $\forall x \in [0, 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0, 2]$, puis que u_n converge vers α .

9) Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

Alors : f est constante si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

Alors : f est croissante si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

Alors : f est décroissante si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Démonstration :

Montrons que f est croissante si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

Soit $x < y$, comme f est dérivable, il existe c dans $]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$.

On a f croissante si et seulement si $f(y) - f(x) \geq 0$ si et seulement si $f'(c) \geq 0$.

10) Théorème de dérivabilité aux bornes

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$.

En particulier si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a à droite et $f'(a) = L$.

11) Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

S'il existe un réel L tel que $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f'(x) = L$,

alors : f est dérivable en a , et $f'(a) = L$, et f' est continue en a .

Démonstration :

Soit $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f'(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$, pour tout x de $I \setminus \{a\}$.

Il existe c_x dans $]a, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Puisque $|c_x - a| \leq |x - a|$, on a $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$ et $f'(c_x) \rightarrow L$, par unicité de la limite $f'(a) = L$.

III. Fonctions de classe C^p

I désigne un intervalle de \mathbb{R} , et p un entier supérieur ou égal à 2, et toutes les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{R} .

1) Fonctions de classe C^1

a) Définition

Soit f une fonction définie sur I , on dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I .

b) Théorème (rappel du II)

Soit f une fonction continue sur I . Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'(x)$ a une limite finie L lorsque x tend vers a ,

alors f est de classe C^1 sur I et $f'(a) = L$ (Théorème de prolongement C^1).

2) Dérivées d'ordre supérieur

Soit f une fonction définie sur I .

On dit que f est p fois dérivable sur I , si f' est $(p-1)$ fois dérivable sur I .

On note $f^{(p)}$ cette dérivée p -ième. Ainsi : $f^{(p)} = [f^{(p-1)}]'$.

Par convention, $f^{(0)} = f$.

On note $D^{(p)}(I)$ l'ensemble des fonctions p fois dérivables sur I .

Exercice :

Déterminer les dérivées k -ièmes de :

$$- x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$- x \rightarrow \cos(x)$$

3) Fonctions de classe C^p

Soit f une fonction définie sur I , p un entier.

On dit que f est de classe C^p si f est p fois dérivable sur I et si $f^{(p)}$ est continue sur I .

On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsque : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f est C^k sur I .

4) Formule de Leibniz

Soit n un entier naturel.

Soit $(f, g) \in (C^n(I))^2$, alors $f \times g$ est $C^n(I)$ et $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Exemple :

Calculer la dérivée n -ième de la fonction suivante : $x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$.

Posons $f(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x$.

On va appliquer la formule de Leibniz en écrivant $f(x) = g(x)h(x)$ avec $h(x) = x^3 + 2x - 7$ et $g(x) = e^x$.

La situation est assez facile ici car $h'(x) = 3x^2 + 2$, $h''(x) = 6x$, $h'''(x) = 6$ et $h^{(k)}(x) = 0$ dès que $k \geq 4$. D'autre part, les dérivées successives de la fonction exponentielle sont encore égales à la fonction exponentielle. On en déduit que la dérivée n -ième de f est :

$$(x^3 + 3nx^2 + (3n^2 - 3n + 2)x + (n^3 - 3n^2 + 4n - 7))e^x.$$

5) Théorème de prolongement de classe C^p

Si f est de classe C^p sur $I \setminus \{a\}$ et si $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f^{(i)}(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers a , alors f admet un prolongement de classe C^p sur I .

IV. Les formules de Taylor

1) Formules de Taylor

Une remarque préliminaire : les formules de Taylor sont ici proposées en un réel « a » ; lorsque $a = 0$, on parle aussi de Taylor-Mac-Laurin.

a) Formule avec reste intégral à l'ordre n

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I , $a \in I$.

Alors :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Démonstration : par récurrence avec IPP.

C'est la formule avec l'hypothèse la plus forte, qui permet une estimation exacte de l'erreur... au prix d'un calcul intégral possiblement fastidieux...

b) Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n (ou de reste d'ordre $n+1$)

Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple :

Soit $f : t \rightarrow \ln(1+t)$ définie sur $] -1 ; +\infty[$.

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on obtient l'existence d'un réel c_x entre 0 et x tel que (il suffit de prendre $b = x$, $a = 0$) :

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x \frac{1}{1+0} + \frac{x^2}{2!} \frac{-1}{(1+0)^2} + \frac{x^3}{3!} \frac{2}{(1+c_x)^3} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c_x)^3}.$$

c) Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I , $a \in I$.

Alors :

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!},$$

où M_{n+1} est un majorant de $t \rightarrow f^{(n+1)}(t)$.

Démonstration : on majore la formule de Taylor avec reste intégral.

2) Formule de Taylor-Young

Si la formule de Taylor-Lagrange donne des renseignements sur tout un intervalle, la formule de Taylor-Young est une formule locale, qui ne donnera des informations qu'au voisinage d'un point. Elle permettra d'affirmer l'existence de développements limités et de faire des études locales de courbes. C'est la formule la moins exigeante en termes d'hypothèses.

a) La formule

Soit f une fonction de classe C^n , ou juste dérivable n fois sur un voisinage d'un point a dans \mathbb{R} , alors :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Démonstration : par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, il s'agit du développement limité à l'ordre 1.

On suppose le résultat vrai au rang n .

Soit f de classe C^{n+1} , alors f' est de classe C^n , et :

$$\forall x \in I, f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + \varepsilon(x)(x-a)^n.$$

On peut intégrer : $f(t) - f(a) = \sum_{k=0}^n \int_a^t \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) dx + \int_a^t \varepsilon(x)(x-a)^n dx$.

Donc $f(t) - f(a) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + \int_a^t \varepsilon(x)(x-a)^n dx$.

Or $\frac{1}{|(t-a)^{n+1}|} \left| \int_a^t \varepsilon(x)(x-a)^n dx \right| \leq \frac{1}{|(t-a)^{n+1}|} \frac{\varepsilon}{2} \int_a^t |(x-a)|^n dx$ car, pour tout $\frac{\varepsilon}{2}$, à partir d'un certain rang $|\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Et $\frac{1}{|(t-a)^{n+1}|} \left| \int_a^t \varepsilon(x)(x-a)^n dx \right| \leq \frac{1}{|(t-a)^{n+1}|} \frac{1}{n+1} |t-a|^{n+1} \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow 0$.

b) Remarque :

La formule de Taylor-Young en 0 s'écrit :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exercice :

1) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 de $e^x - \sin x - \cos(x)$.

2) En déduire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos(x)}{x^2}$.

3) Extension...

a) Définition

Soit D un intervalle de \mathbb{R} , et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

On dit que f est **dérivable en** $a \in D$ si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe dans \mathbb{C} et est finie.

b) Proposition

Si f est une fonction définie par $f(t) = x(t) + iy(t)$ avec x et y à valeurs dans \mathbb{R} .

Alors f est dérivable en a si et seulement si x et y sont dérivables en a , et : $f'(a) = x'(a) + iy'(a)$.

c) Remarques : On peut alors étendre aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} :

- les notions de dérivabilité à droite et à gauche ;
- les opérations : somme, produit, quotient ;
- la notion de dérivée n -ième et la formule de Leibniz ;
- la formule de Taylor-Young.

Attention : la notion d'extremum local n'a plus de sens pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{C} ! Le théorème de Rolle et le TAF ne sont plus valables.

Exercice :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \rightarrow e^{it}$.

- 1) Montrer que f est continue sur $[0, 2\pi]$.
- 2) Montrer que f est dérivable sur $]0, 2\pi[$ et déterminer l'expression de f' .
- 3) Vérifier que $f(0) = f(2\pi)$: quel théorème classique pour une fonction de \mathbb{R} sur \mathbb{R} est contredit ici ?

V. Fonctions convexes

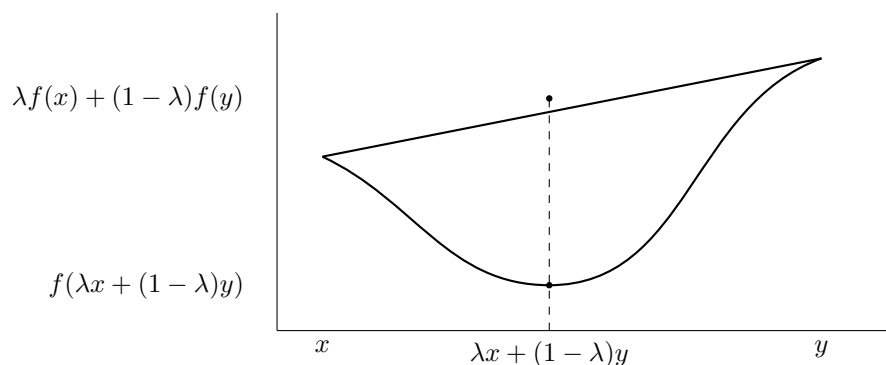
1) Définition

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2 \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Une fonction f est dite concave si $-f$ est convexe.

Graphiquement :



Exemple : la fonction Arcsin est convexe sur $[0, 1]$, la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est concave sur \mathbb{R}^+ (très facile à vérifier avec la proposition 6).

2) Proposition

Il y a équivalence entre :

1) f convexe sur I ;

$$2) \forall (a, b, c) \in I^3, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} ;$$

3) $\forall a \in I, x \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur son domaine de définition.

Démonstration : en exercice !

3) Proposition

Si f est convexe sur I et x_0 est à l'intérieur de I , alors f est dérivable à droite et à gauche en x_0 , avec de plus $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$.

Démonstration : il suffit d'écrire l'inégalité des 3 pentes... et de passer à la limite.

4) Proposition

Si f est convexe sur I , alors f est continue sur l'intérieur de I .

Démonstration : prendre deux suites a_n et c_n tendant vers b respectivement par défaut et par excès, écrire l'égalité des 3 pentes, et en déduire que $f(a_n)$ et $f(c_n)$ tendent vers $f(b)$.

Exercice :

Soit f convexe sur I . Montrer que si f admet un minimum local y_0 , alors c'est un minimum global.

5) Proposition

Si f est dérivable, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Dans le cas où f est deux fois dérivable, alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Démonstration : utiliser la propriété de la pente.

6) Exercice : soit f dérivable et convexe et $x_0, y_0 \in I$ avec $x_0 < y_0$, alors :

$$f'(x_0) \leq \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} \leq f'(y_0).$$

7) Définition : si f est dérivable en x_0 , x_0 est un point d'inflexion pour f si la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ traverse la courbe représentative de f en ce point.

La courbe opère un changement de concavité. En particulier, si f est deux fois dérivable en x_0 et si x_0 est un point d'inflexion de f , $f''(x_0) = 0$.

Réciproquement, si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 , alors x_0 est un point d'inflexion de f .

8) Position par rapport à la tangente

Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I , alors :

$$\forall (x, a) \in I^2, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a).$$

Démonstration :

Soit φ la fonction définie sur I par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(a)$. Comme f est dérivable, alors φ est dérivable et $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Or f est convexe donc f' est croissante, ainsi pour $x \leq a$, $\varphi'(x) \leq 0$ et pour $x \geq a$, $\varphi'(x) \geq 0$; ainsi a est un minimum pour φ et $\varphi(a) = 0$.

Étude d'un exemple :

Démontrer que la fonction \sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Écrire l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$.

En déduire l'inégalité : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \leq x$.

À l'aide de la corde reliant $(0, \sin(0))$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, justifier que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x$.

VI. Exercices

Exercice n°1

- 1) Que dire de la parité de la dérivée d'une fonction paire et dérivable sur \mathbb{R} ?
- 2) La dérivée d'une fonction périodique sur \mathbb{R} est-elle périodique sur \mathbb{R} ?

Exercice n°2

- 1) Démontrer que la fonction sh définit une bijection dérivable de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , soit f^{-1} sa réciproque.
- 2) Démontrer que f^{-1} est dérivable.
- 3) Donner une expression de $(f^{-1})'(x)$.

Exercice n°3

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

- 1) Démontrer que si f est dérivable en 0, alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = f'(0)$.
- 2) Si la limite précédente est finie, peut-on en déduire que f est dérivable en 0 ?

Exercice n°4

Étudier la dérivabilité de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{1 + |x|}$.

Exercice n°5

(les 3 questions sont indépendantes)

- 1) Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$.
- 2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
- 3) Soit f de classe C^2 sur $[a, b]$, montrer que $\forall x \in]a, b[, \exists c \in]a, b[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c).$$

Exercice n°6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $n \geq 2$ un entier.

On suppose que f s'annule au moins n fois.

Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins $n - 1$ solutions réelles distinctes.

Exercice n°7

Démontrer que la fonction $x \rightarrow x - \sin(x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exercice n°8

Soit h la fonction de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow x^2 \tan(x)$.

Déterminer les extrema locaux et globaux de h .

Exercice n°9

Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})) = 0$.

Exercice n°10

Soit α un réel supérieur ou égal à 0.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ pour tout entier n .

Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice n°11

Montrer que la fonction $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \text{Arcsin}(1 - x^2)$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice n°12

(MPSI lycée Châtelet)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2 \ln(e^x + 1)$ et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

On définit la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Justifier le fait que f est définie sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que pour tout x réel, on a : $f(x) = -x + 2 - 2 \ln(e^{-x} + 1)$. En déduire que f est paire sur \mathbb{R} .
- 3) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
- 4) Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C et étudier la position de la courbe C par rapport à l'asymptote D .
- 5) Donner le tableau de variations de f .
- 6) Déterminer la solution, notée α , de l'équation $f(x) = x$.
- 7) Montrer que pour tout x réel : $f''(x) = -2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.
- 8) En déduire que : $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{e-1}{e+1}$.
- 9) On donne les valeurs approchées à 10^{-2} près suivantes : $f(0) \simeq 0,61$ $f(1) \simeq 0,37$ $\ln(e-1) \simeq 0,54$.
Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
- 10) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{e+1}\right)^n$.
- 11) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

Exercice n°13

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, soit f une fonction dérivable sur $[a; b]$ avec $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ (avec $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$).

Exercice n°14

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a, b[$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Indication : poser $\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

Exercice n°15

(devoir commun INP 2025)

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos^2(x)}$.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^3$.

Montrer que f est constante sur \mathbb{R} .

Exercice n°16

(oraux de concours)

On rappelle que la fonction tangente hyperbolique est définie sur \mathbb{R} par le quotient $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$.

1) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

(b) Soit $y \in]-1, 1[$. Résoudre l'équation $\text{th}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On note φ la fonction d'expression : $\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

2) (a) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_φ de φ .

(b) Étudier la parité de φ sur son domaine de définition.

(c) Étudier les variations de φ sur \mathcal{D}_φ et dresser son tableau de variations (*on calculera les limites aux bornes du domaine de définition*).

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\text{th}(x)) = x$.

Exercice n°17

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Démontrer que f admet un prolongement par continuité en 0 (on note toujours f ce prolongement).

2) Démontrer que f est dérivable en 0.

3) Calculer pour tout x réel non nul, $f'(x)$.

Exercice n°18

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est convexe sur $[a, b]$ et que $f(a) = f(b)$.

Montrer que pour tout réel x de $[a, b]$, on a $f(x) \leq f(a)$.

Exercice n°19

Soient a et b deux réels positifs.

Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer l'inégalité de Hölder : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (utiliser la concavité de \ln).

Exercice n°20

Soit f une fonction convexe définie sur $[A, +\infty[$, croissante, et non constante. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Exercice n°21

Soient x et y deux réels strictement supérieurs à 1.

Montrer que $(\ln(\sqrt{x}))^2 + (\ln(\sqrt{y}))^2 \geq 2 \ln(\sqrt{x}) \ln(\sqrt{y})$.

Montrer que $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$ (utiliser la concavité de $x \rightarrow \ln(x)$ sur $]1, +\infty[$).

Exercice n°22

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x - E(x))(x - E(x) - 1)$.

Étudier la dérivabilité de g .

Exercice n°23

Soit $f : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$. Montrer que pour tout x de $]1, \infty[$, $(f^{-1})'(x)$ existe et déterminer son expression en fonction de x (attention à l'expression de f^{-1} sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$).

Exercice n°24

Soit f de I dans \mathbb{R} , dérivable, et telle que pour a et b dans I avec $a < b$, f ne s'annule pas sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f'(a)f'(b) \leq 0$.

Exercice n°25

(oraux concours)

En appliquant un théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur les intervalles $[k, k+1]$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, montrer que : $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.

En déduire la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

Exercice n°26

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 1$.

Pour tout entier naturel n , on pose : $P_n(x) = \frac{D^n(f^n)}{2^n n!}$, où D^n désigne l'opérateur de dérivée n -ième.

- 1) Démontrer que P_n a la parité de n .
- 2) Calculer $P_n(1)$.
- 3) En déduire $P_n(-1)$.

Exercice n°27

Soit f la fonction définie par : $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)$.

- 1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
- 2) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice n°28

- 1) Calculer de deux façons la dérivée n -ième de $x \rightarrow x^{2n}$.
- 2) En déduire une expression de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice n°29

Soit a un réel strictement positif.

- 1) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5.
- 2) Montrer que $0 \leq \text{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!} \text{sh}(a)$.

Exercice n°30**Définition 2.6** (Fonction lipschitzienne)

Soit $M \geq 0$. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est M -lipschitzienne si $\forall (x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Montrer qu'une fonction g de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ est lipschitzienne.

Exercice n°31**Règle de l'Hôpital**

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$ et à valeurs réelles. On suppose que $\forall x \in]a; b[, g'(x) \neq 0$.

- 1) Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. On pourra considérer une fonction $f - \lambda g$ avec λ bien choisi.
- 2) On suppose que g' ne s'annule pas sauf en a , et que $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ existe. Montrer que g est injective, puis que

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)} = \ell.$$

Exercice n°32

(oraux de concours)

- 1) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 3 pour l'exponentielle.
- 2) Donner un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que, pour tout x de $[0, 1]$, $|e^x - P(x)| \leq (e - 1)/6$.
- 3) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre n pour l'exponentielle, et en déduire l'existence d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n vérifiant :

$$\forall x \in [0, 1], |e^x - P_n(x)| \leq (e - 1)/n!$$

Exercice n°33

Montrer que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x \arctan(t)e^{-t} dt$ possède une limite finie en $+\infty$.

Exercice n°34

- 1) Soient $a < b$ deux réels. Soient f et g , deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

(a) Justifier que $g(a) \neq g(b)$.

(b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

(c) En déduire **la règle de l'Hospital** :

- si f et g sont dérivables au voisinage de a ,
- si g' ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a),
- si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

- 2) Calculer les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan(x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1 + x^2) - \cos(x)}{e^x - \sqrt{1 + x}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x) - x + 1}{(x - 1)^2}.$$

Problème :

On définit u et f en posant $u(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ et $f(x) = \text{Arccos}(u(x))$.

1) Étudier succinctement la fonction u .

À titre indicatif, on fournit le tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$u(x)$	-9	-1	1	0	-1	1	9	26	55

En particulier,

- Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{3}{2}(x+3)(x+1)$.
- Déterminer les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \in [-1; 1]\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \in]-1; 1[\}$.

2) Déterminer le domaine de définition de f .

3) Justifier la continuité de f .

4) Déterminer le domaine de dérivabilité de f .

5) Calculer la dérivée de f .

6) Dresser le tableau de variations de f .

7) (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3\theta)$ comme polynôme en $\cos(\theta)$.

(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $f(2 \cos(\theta) - 2)$.

8) Soit φ la fonction définie par $\varphi(\theta) = \text{Arccos}(\cos(3\theta))$.

(a) Quel est l'ensemble de définition D_φ de φ ?

(b) La fonction φ est-elle paire ? Impaire ? Périodique ?

(c) Que vaut φ sur $I = \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$?

(d) Dédurre des questions précédentes le graphe de φ sur $[-\pi; \pi]$.

(e) Justifier la continuité de φ .

(f) Étudier la dérivabilité de φ .

(g) Calculer φ' et en déduire que φ est affine sur des intervalles que l'on déterminera.

(h) Déterminer l'expression de φ sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

9) Dédurre des questions précédentes des expressions simplifiées de f sur les sous-domaines de D_f .