

Chapitre 17 : Les développements limités

M. Calciano

I. Généralités

1) Définition

Développements limités à l'ordre n de f au voisinage d'un point a

Soit I un intervalle et $a \in \bar{I}$ un point de I ou une extrémité réelle de I , f désigne une fonction définie dans I (éventuellement privé de a).

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout x dans le voisinage de a :

$$f(x) = P_n(x - a) + o((x - a)^n)$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Ou ce qui revient au même :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \varepsilon(x)(x - a)^n$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

On note $DL_n(f)$ le développement correspondant.

Remarque : Le changement de variable $x = a + t$ permet de se ramener au voisinage de l'origine.

Vocabulaire :

- $P_n(x - a)$ est la partie régulière du développement limité.
- $f(x) - P_n(x - a)$ est le reste du développement limité de f à l'ordre n .

Exemple : Soit $f(x) = 1 - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1 + x)$ (définie sur $] - 1; +\infty[$).

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x) = 0$, alors $x^3 \ln(1 + x) = o(x^3)$.

Et :

$$f(x) = 1 - x^2 + 2x^3 + o(x^3)$$

Remarque n°2 : Un développement limité est une approximation locale d'une fonction par un polynôme. L'approximation est d'autant plus précise que l'ordre du DL est élevé.

2) Définition

Si I est non majoré, on dit que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de $+\infty$, s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I \cap \mathbb{R}^{+*}$:

$$f(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) + o \left(\frac{1}{x^n} \right)$$

De façon équivalente :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o \left(\frac{1}{x^n} \right)$$

3) Formule de Taylor-Young (Rappel du chapitre "Calcul différentiel")

On suppose que f est C^n sur I et que : $a \in I$.

Alors f a un développement limité à l'ordre n au voisinage de a , et de plus pour x dans le voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

4) Propriétés

a) Unicité du DL

Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a , alors le développement limité a une partie régulière unique.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il y en ait 2 avec $(a_0, \dots, a_n) \neq (b_0, \dots, b_n)$.

On a :

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

Soit p le plus petit entier tel que $a_p \neq b_p$.

On a :

$$\sum_{k=p}^n (a_k - b_k) x^k = o(x^n)$$

On divise par x^p et on obtient :

$$a_p - b_p = \sum_{k=p+1}^n (-a_k + b_k) x^k = o(x^{n-p}) \rightarrow 0$$

Absurde puisque $a_p - b_p \neq 0$.

b) Conséquence de l'unicité :

Soit f une fonction admettant un développement limité au voisinage de 0.

Si f est paire, alors la partie régulière du DL n'est constituée que de monômes de degré pair.

Si f est impaire, alors la partie régulière du DL n'est constituée que de monômes de degré impair.

On écrit le DL de $f(-x)$ et on en déduit le résultat par unicité du DL.

Attention : Ce corollaire n'admet pas de réciproque. Ainsi une fonction admettant un DL au voisinage de 0 avec une partie régulière paire (resp. impaire), n'a aucune raison d'être paire (resp. impaire), en effet la fonction « se cachant » derrière le $o(x^n)$ n'a aucune parité a priori.

II. Obtention de DL

Tous les théorèmes évoqués dans ce paragraphe sont énoncés à l'origine, les résultats se généralisent par changement de variable du type $x = a+t$ pour un DL au voisinage de $a \neq 0$ et un changement du type $x = \frac{1}{t}$ au voisinage de $\pm\infty$.

1) Théorème dit de « troncature »

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

Si f admet un $DL_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Alors f admet un $DL_p(0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p + o(x^p)$$

Évidente !

2) Propriétés

Rappels préliminaires sur les relations de comparaison :

$$\text{On a : } o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m})$$

$$\text{On a : } x^n \times o(x^m) = o(x^{n+m})$$

$$\text{On a : } o(x^n) + o(x^m) = o(x^n) \text{ si } n \leq m$$

Soit : $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$, avec P_n et Q_n deux polynômes de degré inférieur ou égal à n .

a) Opérations algébriques sur les DL

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha P_n + \beta Q_n)(x) + o(x^n)$$

On a :

$$(f \times g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$$

où R_n est le polynôme $P_n \times Q_n$ tronqué à l'ordre n .

Soit $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Alors :

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n(P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x))$$

Or P et Q sont polynomiales donc continues donc bornées au voisinage de 0.

Et $\lim_{x \rightarrow 0} P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) = 0$.

D'où : $f(x)g(x) = P(x)Q(x) + o(x^n)$.

Il suffit alors de prendre $R(x)$ la troncature de $P(x)Q(x)$ à l'ordre n .

Remarque : Le produit des DL générés à des ordres différents correspond au produit des parties régulières tronqué par le plus petit des deux ordres.

Exemple : Poursuivre les calculs suivants :

$$(1 + t + o(t))(2 + 3t + 4t^2 + o(t^2))$$

$$(1 + t)((2 + 3t + 4t^2 + o(t^2)))$$

$$t((2 + 3t + 4t^2 + o(t^2)))$$

Philosophiquement, dans $(1 + t)((2 + 3t + 4t^2 + o(t^2)))$, le 1 de $1 + t$ fait apparaître $o(t^2)$ qui va limiter le DL malgré le $t o(t^2)$ qui donnerait $o(t^3)$.

Alors que $t((2 + 3t + 4t^2 + o(t^2)))$ va uniquement faire apparaître $o(t^3)$.

b) Pour les quotients...

De la forme : $\frac{1}{1-u}$ (théorème admis) :

Soit u une fonction telle que : $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$, si u admet un DL à l'ordre n en 0, alors

$x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ admet un DL à l'ordre n en 0, dont la partie régulière est celle du

développement à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \sum_{k=0}^n (u(x))^k$.

De la forme $\frac{f}{g}$:

Soient f et g deux fonctions admettant chacune un DL à l'ordre n en 0, si g a une limite non nulle en 0, alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en 0.

On a : $\frac{f}{g} = \frac{f}{L} \times \frac{1}{1 - (1 - \frac{g}{L})}$ et on applique le résultat précédent.

Remarque : Ainsi, si f ne s'annule pas dans un voisinage de 0, alors son inverse admet un $DL_n(0)$.

Exemple : Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e^x} &= \frac{1}{1 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^3 \\ \frac{1}{1 + e^x} &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3) \end{aligned}$$

Remarque : Une autre technique appelée "division par puissances croissantes" permet d'obtenir le DL sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas en 0. Mais cette technique est HP, elle sera juste vue en exercice.

c) Composée

Soit g une fonction définie sur un intervalle I et admettant un DL à l'ordre n au voisinage d'un point a de I . Soit f une fonction définie sur $g(I)$ et admettant un DL à l'ordre n au voisinage du point $g(a)$ de I .

Alors $f \circ g$ admet un DL à l'ordre n au voisinage du point a .

Et : $(f \circ g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le polynôme $P_n \circ Q_n$ tronqué à l'ordre n .

Attention : Ne pas confondre $P_n \times Q_n$ et $P_n \circ Q_n$.

Étude d'un exemple : Déterminer le DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$.

On écrit le DL de \ln : $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$.

Puis celui de $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.

On pose $u = \sin(x)$, et on vérifie bien que u tende vers 0.

On a :

$$\ln(1 + u) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4)$$

On poursuit :

$$\begin{aligned}
 &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
 \end{aligned}$$

d) Primitive

On suppose f continue dans I , soit F une primitive de f sur I alors :

$$F(x) = F(0) + \int_0^x P_n(t) dt + o(x^{n+1})$$

On part du DL de la dérivée, on l'intègre et on utilise l'unicité du DL.

Exemple : Déterminer le DL en 0 de arctan à l'ordre 4.

On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Formons le DL en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + o(x^3)$.

Et : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3)$, d'où :

$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

Remarque :

$$\int_a^x o((u-a)^n) du = o((x-a)^{n+1})$$

e) DL d'une fonction dérivée

On suppose f dérivable dans I , s'il existe, le $DL_{n-1}(0)$ de f' est donné par :

$$f'(x) = P'_n(x) + o(x^{n-1})$$

avec $P_n(x)$ correspondant au $DL_n(0)$ de f .

Attention : Si une fonction f , dérivable, admet un DL à l'ordre n au voisinage de a , sa dérivée n'admet pas nécessairement un DL à l'ordre $n-1$.

Cependant, si on sait que f' admet un DL à l'ordre $n-1$ alors sa partie régulière correspondra à la dérivée de la partie régulière du DL de f .

f) DL d'une fonction réciproque

Si une fonction f admet une réciproque g , comment, sous réserve d'existence et que $f'(0) \neq 0$, obtenir l'existence du DL de g ?

Étude d'un exemple : Soit f définie par $f(x) = (1+x^2) \ln(1+x)$.

Montrer que f réalise une bijection de $] - 1, +\infty[$ sur un ensemble à définir.

(Ind. On pensera à vérifier que $x \ln(1+x) \geq 0$, pour $x \leq 0$)

Soit g la réciproque de f , écrire le DL à l'ordre 3 de $g(f(x))$ en fonction de celui de g . En exploitant l'expression de $g(f(x))$, en déduire le DL de g à l'ordre 3.

III. Applications des DL...

1) Signe

Si f possède un DL à l'ordre n en 0 de la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Si p désigne le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$.

Alors : $f(x) \sim_0 a_p x^p$ et si f est réelle, $f(x)$ est du même signe au voisinage de 0 que $a_p x^p$.

On a $f(x) = a_p x^p + \sum_{k=p+1}^n a_k x^k + o(x^n)$.

Donc $f(x) = a_p x^p + o(x^p) = a_p x^p + o(a_p x^p)$ car $a_p \neq 0$ donc $f(x) \sim_0 a_p x^p$.

On renvoie au chapitre sur les relations de comparaison pour en déduire que les deux expressions ont le même signe.

2) DL à l'ordre 0

Une fonction f admet un DL en 0 à l'ordre 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0.

Si on note $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$, alors $f(x) = L + o(1)$.

Il suffit de poser $\varepsilon(x) = f(x) - L$.

3) DL à l'ordre 1

Soit f une fonction définie en 0.

On a :

$$[f \text{ dérivable en } 0] \Leftrightarrow [f \text{ admet un DL à l'ordre 1 en } 0]$$

Ce DL est alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

Si f admet un DL à l'ordre 1 en 0, alors : $f(x) = f(0) + a_1 x + o(x)$.

Donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{a_1 x + o(x)}{x} = a_1 + o(1) \rightarrow a_1$ donc f est dérivable et $f'(0) = a_1$.

Réciproquement : Si f est dérivable en 0 , alors $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \longrightarrow f'(0)$ d'où :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) + o(1)$$

Soit : $f(x) = f(0) + xf'(0) + xo(1) = f(0) + xf'(0) + o(x)$.

Remarque : On peut trouver des fonctions admettant des DL à l'ordre $n > 1$ et n'étant pas n fois dérivable.

Exemple : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ or $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$ donc $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$.

Ainsi f admet un DL à l'ordre 2 mais n'est pas deux fois dérivable (à vérifier!).

En résumé et de façon insistante :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. f continue en $a \iff f$ admet un DL d'ordre 0 en a .
Dans ce cas, le $DL_0(a)$ est

$$f(x) = f(a) + o(1)$$

2. f dérivable en $a \iff f$ admet un D.L. d'ordre 1 en a .
Dans ce cas, le $DL_1(a)$ est

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

3. f de classe C^n sur $I \implies f$ admet un D.L. d'ordre n en a .
Ce $DL_n(a)$ est donné par la formule de Taylor-Young.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x - a)^n)$$

4) Recherche d'extrema

Étude d'un exercice : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe x_0 tel que : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$.

Montrer alors que si $f''(x_0) < 0$, alors f possède un maximum local en x_0 et un minimum local dans le cas contraire.

5) Étude des branches infinies

On dit que la courbe représentative \mathcal{C}_f de f possède **une branche infinie** lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$.

Dans ce cas, plusieurs possibilités se présentent :

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que \mathcal{C}_f admet une branche parabolique horizontale d'axe (Ox).

Exemple : $f(x) = \sqrt{x}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que \mathcal{C}_f admet une branche parabolique verticale d'axe (Oy).

Exemple : $f(x) = x^2$.

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ où $a \in \mathbb{R}^*$,

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on dit que \mathcal{C}_f admet une branche parabolique oblique d'équation $y = ax$.

Exemple : $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ avec $b \in \mathbb{R}$, on dit que \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Exemple : $f(x) = 2x - 3 + e^{-x}$.

Le signe de $f(x) - (ax + b)$ donne les positions relatives de \mathcal{C}_f et de l'asymptote.

Exercice : Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

- Montrer que $f(x) \sim_{\infty} x$.
- Puis que $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ (on posera $u = \frac{1}{x}$ mais pas trop vite...).
- En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe représentative et sa position.

IV. Catalogue des développements limités classiques :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les développements limités à l'ordre n en 0 :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

V. Exercices

Exercice n°1

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction : $x \mapsto e^x + \ln(1+x)$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction : $x \mapsto e^x(1+x)^{1/3}$.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

Exercice n°2

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{3}$ de la fonction : $x \mapsto \cos(x)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction : $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction : $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$.

Exercice n°3

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction : $x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction : $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 2}$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction : $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)}$.

Exercice n°4

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au point 2 de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. La fonction admet-elle un DL d'ordre $n \geq 1$ en 0 ?

Exercice n°5

Au voisinage de 0, étudier la position de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ par rapport à sa tangente.

Exercice n°6

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que $f(x) \sim_{\infty} x$.
2. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de f .
3. Étudier la branche en $+\infty$.

Exercice n°7

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\pi; \pi[$.

(Il est conseillé de réduire au même dénominateur et pour f et pour f' . Au fait, est-ce que le DL de f permet d'obtenir celui de f' ?)

Exercice n°8 (oraux concours)

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \tan(x)$.

Exercice n°9

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 1 de la fonction : $x \mapsto \arctan(x)$.

Exercice n°10

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f .

Exercice n°11

1. Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^6}$. Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$.
2. Soit $g : x \mapsto \frac{\ln(\cos x)}{1+x}$ définie sur $] -1; 1[$. Déterminer $g'(0)$ et $g''(0)$.

Exercice n°12

Pour tout entier naturel n , on donne $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

1. Montrer que (I_n) tend vers 1.
2. Montrer que $I_n - 1 \sim_{\infty} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. À l'aide d'une IPP (sur $I_n - 1$), montrer que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice n°13 (INP 2025)

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

Exercice n°14

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = x \operatorname{ch}(x)$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit g sa réciproque, justifier que g admet un DL à l'ordre 5 en 0 de la forme :

$$g(u) = a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o(u^5)$$

3. Déterminer ce développement en exploitant $g \circ f$.

Exercice n°15 (oraux concours)

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\cos x - \sin x}$.

Exercice n°16 (INP 2024)

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt[3]{1 + \sin x}$.

Exercice n°17 (DS 2025)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f (sans chercher ici à prolonger f) et justifier que f soit dérivable sur D .
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 0, préciser la valeur de $f(0)$. Par abus de langage, on continuera à noter f le prolongement ainsi obtenu.
3. Déterminer le DL à l'ordre 2 de f en 0.
4. Justifier que f soit dérivable en 0. Peut-on préciser la valeur de $f'(0)$?
5. Déterminer l'équation de la tangente en 0 et sa position par rapport à la courbe de f .

Exercice n°18

Soit $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de f en $+\infty$.

Exercice n°19

Soit f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$.

1. (a) Justifier que f est bien définie sur $] - 1; +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Justifier que f est continue sur $] - 1; +\infty[\setminus \{0\}$.
(c) Donner un équivalent et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
(d) En déduire que f se prolonge en une fonction continue, que l'on notera encore f , sur $] - 1; +\infty[$.
2. (a) Montrer que f est dérivable sur $] - 1; +\infty[\setminus \{0\}$ et calculer f' .
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.
En déduire, en rédigeant très précisément, que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
(c) Au moyen du taux d'accroissement, étudier la dérivabilité de f en -1 .
(d) Justifier que f est \mathcal{C}^1 sur $] - 1; +\infty[$.
(e) Au moyen du taux d'accroissement en 0, retrouver que f est dérivable en 0.
3. (a) Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.
(b) Retrouver alors que f est dérivable en 0. Donner également la tangente en 0 à \mathcal{C}_f et préciser la position de \mathcal{C}_f par rapport à sa tangente.