Chapitre 19 : Les matrices

M. Calciano

I. Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$

Dans tout le chapitre, $\varkappa$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définition

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle matrice de n lignes et p colonnes toute famille : $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\,1\leqslant j\leqslant p}$ d'éléments de $\varkappa$.

Dans la pratique, on assimile la famille $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\,1\leqslant j\leqslant p}$ avec le tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, sa deuxième ligne est $(2\quad 2\quad 6\quad 8)$ et sa troisième colonne est $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$.

2) Vocabulaire

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\varkappa)$ est une matrice colonne.

Une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\varkappa)$ est une matrice ligne.

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\varkappa)$ est une matrice carrée d'ordre n.

3) Matrice identité et matrice $E_{i,j}$

On note, pour n entier naturel, I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, la matrice de coefficient : $\delta_{i,j}$ (il s'agit du symbole de Kronecker, valant 1 lorsque $i=j$, et 0 sinon).

La matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1. Les matrices de ce type sont dites **élémentaires**.

Proposition 18
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\varkappa)$. Alors,

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

Ainsi, toute matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\varkappa)$ est combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{m,n}(\varkappa)$.

4) Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-m,p-q}(\varkappa)$ est dite extraite de A si elle est obtenue en supprimant m lignes et q colonnes de A.

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ obtenue en supprimant la ligne 3 et la colonne 2.

5) Définition

Soit n, p et q trois entiers non nuls.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, on définit :

- la somme : $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$
- la matrice produit $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $(\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{i,j}$
- la matrice transposée ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\varkappa)$, par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{m,n-1} \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Propriétés de la transposition

1)a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\varkappa)$, $\forall \lambda, \mu \in \varkappa$, $\quad (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$

b) $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\varkappa)$, $\quad \left(A^T\right)^T = A$

2) Soient A et B deux matrices. Si le produit AB existe, alors le produit $B^T A^T$ existe et

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\varkappa)$, on définit le produit AB, élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\varkappa)$ par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \boxed{c_{i,j}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix}$$

Remarque : Cette définition « étrange » du produit aura un intérêt pour écrire la matrice représentant la composée d'applications linéaires...

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a : $AB = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -4 \\ 12 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ et BA n'est même pas défini ! ! !

On vérifie bien ici que $AB \neq BA$, et que le produit matriciel n'est en général pas commutatif.

6) Théorème

$(\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa), +, .)$ est un $\varkappa$-espace vectoriel sur $\varkappa$ de dimension np.

Démonstration : Vérifier l'axiomatique sur les espaces vectoriels...

Quant à la dimension, les matrices $E_{i,j}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$.

7) Propriétés du produit

Soient A, B et C trois matrices (pourvu que les produits soient bien définis) :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \text{et} \quad (A + B) \times C = A \times C + B \times C$$
$$A \times 0 = 0 \times A = 0$$

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, alors $I_n A = A I_p = A$.

Démonstration : Montrons que $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Soit $D = B \times C$, $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} c_{kj}$ et $A \times (B \times C) = AD$.

Si $E = AD$, alors

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Et on retrouve le même terme général pour $(A \times B) \times C$.

II. Matrices carrées

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, on dit que :
A est **diagonale** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
A est **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
A est **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
A est symétrique si $^tA = A$
A est antisymétrique si $^tA = -A$

1) Puissance

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, on définit par récurrence les puissances successives de A par :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad A^{k+1} = A \times A^k$$

Remarque : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$ est **nilpotente** s'il existe un entier k tel que $A^k = 0_{n,n}$.

2) Polynôme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, et P le polynôme défini par : $P(X) = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$.
On définit $P(A)$ par : $P(A) = a_p A^p + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$.
Remarque : Si $P(A) = 0_n$, alors on dit que P est un polynôme annulateur de A.

3) Formule de Newton

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$, telles que $A \times B = B \times A$.
Alors :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Démonstration : Par récurrence sur p.
Évident pour $p = 0$.
On suppose que $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.
On a :

$$(A+B)^p(A+B) = \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \right)(A+B) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} A + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} B$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{k+1} B^{p-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p+1-k}$$

On réindexe les sommes en posant $\ell = k+1\ldots$

Ainsi $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ sauf si A et B commutent…

4) Formule dite d'identité géométrique

$$A^{p+1} - B^{p+1} = (A - B) \sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}$$

Démonstration : *Par récurrence sur p...*

III. Matrices carrées inversibles

1) Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, A est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, B est unique et c'est l'inverse de A noté A^{-1}.

Démonstration : *Justifions l'unicité.*

Si A a pour inverse B et C alors $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$.

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

2) Définition

On note $\mathrm{GL}_n(\varkappa)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$ inversibles, c'est un groupe pour la loi $\times$, appelé groupe linéaire.

Démonstration : *Vérifier facilement l'axiomatique...*

3) Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$ alors A inversible $\Leftrightarrow$ A inversible à droite $\Leftrightarrow$ A inversible à gauche.

Démonstration : *(nécessite d'avoir vu la notion de matrice représentant un endomorphisme)*

Supposons que A soit inversible à droite, il existe donc une matrice B telle que $AB = I_n$.

On en déduit que $\mathrm{rg}(B) = n$ sinon il existerait un élément x de E différent de 0, tel que $BX = 0$ et alors $ABX = 0$.

Donc l'endomorphisme représenté par B est bijectif.

Soit X dans $\mathrm{Ker}(A)$, alors il existe x' tel que $X = BX'$, et $AX = ABX'$, donc $ABX' = 0$ et $X' = 0$ car $AB = I_n$. Donc A est de rang n, et A est inversible.

4) Propriétés

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\varkappa)$, alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\varkappa)$, alors ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Si $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\varkappa)^2$, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration : *Si A inversible d'inverse A^{-1} alors : $AA^{-1} = I_n$ donc A^{-1} inversible d'inverse A, donc $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ (par unicité de l'inverse).*

$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ donc AB inversible et par unicité de l'inverse, on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5) Résolution de systèmes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\varkappa)$, on note (S) le système : $AX = B$.

Alors (S) est un système de Cramer si et seulement si A est inversible.

Dans ce cas, l'unique solution de (S) est donnée par : $X = A^{-1}B$.

Remarque : A est inversible si et seulement si le système : $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution 0.

Ainsi A est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes de la matrice forment une famille libre.

6) Cas des matrices triangulaires

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si le produit de ses éléments diagonaux est non nul.

Démonstration : Penser au pivot de Gauss correspondant...

7) Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

a) Méthode basée sur la résolution d'un système

On construit le système $AX = Y$ pour X et Y deux vecteurs (c'est-à-dire deux matrices colonnes).

Si on obtient une unique solution alors A est inversible, et en écrivant $X = BY$, on obtient l'inverse de A à savoir B.

b) Méthode dite de Gauss-Jordan

On écrit A et à sa droite la matrice identité de même taille.

Par opérations élémentaires, on essaie de ramener A à la matrice identité, et on effectue parallèlement les mêmes opérations sur la matrice identité.

Si on obtient à gauche la matrice identité, alors A est inversible et la matrice à droite est son inverse.

Attention, les opérations élémentaires sont soit exclusivement sur les lignes soit exclusivement sur les colonnes.

Étude d'un exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Justifier que A est inversible. Calculer l'inverse de A de deux façons.

IV. Représentations matricielles en dimension finie

1) Définition

On définit la matrice $M_E(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_p}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ représentative d'une famille de p vecteurs par la concaténation de leurs coordonnées en colonnes dans la base E de l'espace vectoriel E.

2) Proposition

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension n, et $E = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.

L'application $\varphi : E \to \mathcal{M}_{n,1}(\varkappa)$, $\overrightarrow{x} \to M_E(\overrightarrow{x})$ qui à tout vecteur $\overrightarrow{x}$ associe sa matrice colonne est un isomorphisme de $\varkappa$-espaces vectoriels.

Démonstration : Clairement φ est linéaire donc c'est un morphisme.
Si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors $M_E(\overrightarrow{x}) = M_E(\overrightarrow{y})$ donc $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$.
D'où : $(x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n = 0$.
Or $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E, donc $x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0$.
Et $x = y$, donc φ est injective.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\varkappa)$, alors $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, soit $b = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, on a $\varphi(b) = A$, donc φ est surjective.

3) Théorème

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension n, et $E = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Soit $A = (\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_p})$ une famille de p vecteurs de E.
Notons : $A = M_E(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_p})$.
Alors A est une base de E si et seulement si A est inversible.

4) Représentation matricielle des applications linéaires

a) Définitions

Soit E_p et F_n des $\varkappa$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E_p.
Soit $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F_n.
On définit la matrice $M_{E,F}(a) \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ représentative de $a \in \mathcal{L}(E, F)$ relativement aux bases E et F par :

$$M_{E,F}(a) = M_F\big(a(\overrightarrow{e_1}), \ldots, a(\overrightarrow{e_p})\big)$$

Remarque : La j-ème colonne de $M_{E,F}(a)$ est constituée des coordonnées de $a(\overrightarrow{e_j})$ dans la base $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n})$. Ainsi, l'expression matricielle d'une application linéaire est sensible aux bases de

Exemple : Soit $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to (2y - x + z,\ 2x - z)$.

1) Justifier que f est linéaire (rapidement).
2) Écrire la matrice de f relative aux bases canoniques B de $\mathbb{R}^3$ et C de $\mathbb{R}^2$.
3) Soit $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, justifier que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$.

« Déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base », pourquoi cette question n'a pas de sens ? Compléter la question, et répondre !

4) Soit $C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, on ne demande pas de démontrer que C' est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $M_{B,C'}(f)$ et $M_{B',C'}(f)$.

Exemple n°2 : Si $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ avec $\dim P = 2$ et $\dim(D) = 1$, on suppose que $P = \text{vect}(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ et $D = \text{vect}(\overrightarrow{e_3})$, alors la projection sur P parallèlement à D et la symétrie par rapport à P

parallèlement à D auront respectivement pour matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Théorème

Soit E_p et F_n des $\varkappa$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E_p et soit $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F_n.

L'application $\psi : \mathcal{L}(E_p, F_n) \to \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, $a \to M_{E,F}(a)$ est un isomorphisme de $\varkappa$-espaces vectoriels.

Remarque : Une application linéaire entre espaces de dimensions finies est entièrement déterminée par sa matrice représentative relative à des bases de E_p et F_n.

c) Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, $a : \varkappa^p \to \varkappa^n$ l'application définie par : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \varkappa^p$, $a(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n)$.

L'application « a » est dite canoniquement associée à A.

Si $A = \text{Mat}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, et si $B = (e_1, \dots, e_p)$ et $C = (f_1, \dots, f_n)$ alors pour tout j de $[\![1, p]\!]$, on a

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{n,j} f_n$$

d) Proposition

Soit $a \in \mathcal{L}(\varkappa^p, \varkappa^n)$ l'application canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$.

$\text{Ker}(a)$ est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$.

$\text{Im}(a)$ est le sous-espace vectoriel engendré par $(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_p})$ canoniquement associés aux colonnes de A.

5) Matrice réduite canonique associée à une application linéaire

Soit $a \in \mathcal{L}(\varkappa^p, \varkappa^n)$ et $r \leqslant \min(n, p)$.

Alors : a est de rang r si et seulement s'il existe des bases E et F telles que $M_{E,F}(a) = J_{n,p,r}$,

où $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{n,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Démonstration : Si A est de rang r, soit $u \in \mathcal{L}(\varkappa^p, \varkappa^n)$ canoniquement associée.

On cherche des bases dans lesquelles u est représentée par $J_{n,p,r}$. La forme de la matrice recherchée incite à commencer par déterminer les derniers vecteurs de B puis les premiers vecteurs de C. Comme $\text{rg}\, u = \text{rg}\, A = r$ alors, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}\, u) = p - r$. Soit $e_{r+1}, \dots, e_p$ une base de $\text{Ker}\, u$ que l'on complète en une base $B = e_1, \dots, e_p$ de E.

Soient pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_i = u(e_i)$. Comme $(e_1, \dots, e_r)$ est une base d'un supplémentaire de $\text{Ker}\, u$ dans E et comme u induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker}\, u$ sur $\text{Im}\, u$ (théorème du rang), $f_1, \dots, f_r$ est une famille libre de F que l'on peut compléter en une base C. On a alors bien $\text{Mat}_{B,C}(u) = J_{n,p,r}$.

Si A est équivalente à $J_{n,p,r}$, alors elles ont même rang. Mais le rang de $J_{n,p,r}$ est le rang de la famille de ses colonnes, et il est égal à r : hors colonnes nulles, on a r colonnes de la base canonique, donc libres.

Exemple : Montrer que le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est 2.

6) Calcul d'un vecteur, matrice d'une composée

Soient E, F et G des $\varkappa$-espaces vectoriels de dimensions finies rapportées aux bases E, F et G, et $a \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $A = M_{E,F}(a)$, alors a est un isomorphisme de E sur F si et seulement si A est inversible.

Et alors : $M_{F,E}(a^{-1}) = A^{-1}$.

Soit : $a \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $A = M_{E,F}(a)$, et $b \in \mathcal{L}(F, G)$, on note $B = M_{F,G}(b)$.

La composée $b \circ a \in \mathcal{L}(E, G)$ et $M_{E,G}(b \circ a) = BA$.

7) Changement de bases

a) Matrice de passage

Soit E et E' deux bases d'un espace vectoriel, on appelle **matrice de passage de E vers E', notée** $P_{E \to E'}$ la matrice représentative de E' dans E.

Ainsi la matrice de passage correspond à « l'expression des nouveaux vecteurs dans l'ancienne base ».

b) Théorème

Soit E, F deux $\varkappa$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit B et B' deux bases de E et soit C et C' deux bases de F.

Soit $P = P_{B \to B'}$ et $Q = P_{C \to C'}$.

Si $\overrightarrow{x} \in E$, on note $X = M_B(\overrightarrow{x})$, $X' = M_{B'}(\overrightarrow{x})$, alors $X' = P^{-1}X$.

Ou plus simplement : $X_B = P_{B \to B'} X_{B'}$.

(1) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, on note $A = M_{B,B}(a)$, $A' = M_{B',B'}(a)$ alors $A' = P^{-1}AP$.
(2) Soit $a \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $A = M_{B,C}(a)$, $A' = M_{B',C'}(a)$ alors $A' = Q^{-1}AP$.

Mais quand utiliser l'une ou l'autre des deux formules ? Pour la première formule, il y a le même changement de base au départ et à l'arrivée. Tandis que pour la deuxième, il y a un changement de bases au départ et un changement de bases différent à l'arrivée !

Et si on avait : $a \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $A = M_{B,C}(a)$, $A' = M_{B,C'}(a)$ alors $A' = Q^{-1}AI_n = Q^{-1}A$.

c) Exercice d'application

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to (2x - z,\ y + z)$.

On désigne par B et C les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

- Donner $M_{B,C}(f)$.
- Soit $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et $C' = (f'_1, f'_2)$ telles que $e'_1 = (1, 0, 1)$; $e'_2 = (0, 1, 2)$; $e'_3 = (1, 0, 0)$ et $f'_1 = (1, 1)$; $f'_2 = (1, -1)$.

Vérifier que B' est une base de $\mathbb{R}^3$ (on admettra le résultat pour C' base de $\mathbb{R}^2$).
— Donner $M_{B',C'}(f)$.

8) Définition

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$ sont dites **semblables s'il existe** $P \in \mathrm{GL}_n(\varkappa)$ **telle que :**
$B = P^{-1}AP$

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ sont dites **équivalentes s'il existe** $P \in \mathrm{GL}_n(\varkappa)$ **et** $Q \in \mathrm{GL}_p(\varkappa)$ **telle que :** $B = Q^{-1}AP$.

V. Rang d'une matrice

1) Théorème-définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$ une matrice à p colonnes notées : $A_1, \dots, A_p$.

Si on note $(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_p})$ les vecteurs canoniquement associés aux colonnes,

Soit a l'application linéaire canoniquement associée à A,

Alors :

$$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(a) = \mathrm{Rg}(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_p})$$

Définition...théorème car cela suppose que deux matrices différentes de la même application linéaire, et donc équivalentes, ont le même rang.

2) Rang de matrices équivalentes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, $r \leqslant \min(n,p)$, $\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si A est équivalente à $J_{n,p,r}$.

3) Caractérisation de l'équivalence

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

4) Rang et opérations élémentaires

On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on effectue une opération élémentaire :

— échanger deux lignes de A
— échanger deux colonnes de A
— remplacer une ligne de A par un multiple non nul de cette ligne
— remplacer une colonne de A par un multiple non nul de cette colonne
— ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne
— ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne

Définition 59 : Matrices d'opérations élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les matrices de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$ suivantes :

— matrice de transvection, avec $\lambda \in \varkappa$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $i \neq j$, de la forme

$$V_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$$

— matrice de dilatation, avec $\lambda \in \varkappa - \{0\}$ et $i \in [\![1, n]\!]$, de la forme

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$$

— matrice de transposition, avec $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, une matrice de $\mathcal{M}_n(\varkappa)$ de la forme

$$T_{i,j} = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$$

Proposition 63 : Matrices élémentaires et opérations élémentaires sur les lignes
Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\varkappa)$ deux matrices.
On a l'équivalence :

A' est obtenue à partir de A par une opération élémentaire sur les lignes $\iff$ il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_m(\varkappa)$ telle que $A' = PA$

Plus précisément,

	A' est obtenue de A par	On a le produit
Avec $i, j \in [\![1, m]\!]$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$A' = T_{i,j}A$
Avec $\lambda \in \varkappa - \{0\}$ et $i \in [\![1, m]\!]$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$A' = D_i(\lambda)A$
Avec $\lambda \in \varkappa$ et $i, j \in [\![1, m]\!]$ avec $i \neq j$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$A' = V_{i,j}(\lambda)A$

5) Rang et matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, le rang de A est l'ordre maximal d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, A est inversible si et seulement si $\mathrm{Rg}(A) = n$.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\varkappa)$, alors A et ${}^tA$ ont même rang.

VI. Trace d'une matrice

1) Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, on appelle trace de A, et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A. Ainsi :

$$\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

2) Proposition

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\varkappa)^2$, $(\lambda, \mu) \in \varkappa^2$, alors : $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \mu\,\mathrm{tr}(B)$.

De plus : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3) Corollaire

Deux matrices semblables ont même trace.

4) Trace d'un endomorphisme

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle trace de u, et on note $\mathrm{tr}(u)$, la trace de la matrice représentative de u relative à une base quelconque.

Remarque : **Pour un projecteur p, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.** Mais la réciproque est fausse, par exemple

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a une trace égale à son rang : 2, mais n'est pas un projecteur !

Étude d'un exercice classique :

Soit U l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \bigoplus \mathrm{Im}(u)$.
2) L'endomorphisme U est-il un projecteur ?

VII. Exercices

Exercice n°1

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice dont les coefficients sont égaux à 1. Calculer U^m pour m entier naturel.

Exercice n°2

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB, BA, $A^2 - B^2$ et $(A+B)(A-B)$.

Exercice n°3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $A^2 - A$. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, et donner A^{-1}.

Exercice n°4

Soient $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$. Montrer que si $ABC = 0$, et si deux des trois matrices sont inversibles, alors la troisième est nulle.

Exercice n°5 (Mines-Ponts PSI 2025)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, on introduit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.

Le calcul sur des matrices définies par bloc procède, sur les mêmes principes que sur les matrices standards.

1) Quel est le rang de M ?
2) Donner une CNS sur A et B pour que M soit inversible.
3) Si c'est le cas, déterminer M^{-1} (*Ind. On se donnera une matrice* $\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$ *telle que* $\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$).

Exercice n°6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

Pour $Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, résoudre $AX = Y$, en déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice n°7

1) Déterminer toutes les puissances positives de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) On considère deux suites réelles définies par :

u_0, v_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -u_n$.

Déterminer une expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Exercice n°8

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $AB = A + I_n$, montrer que A est inversible.

Exercice n°9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout entier n.

Exercice n°10

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension 3, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u soit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n°11

On travaille dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on note B_0 la base canoniquement associée.

1) Montrer que la famille : $B = \big((X-1)^3\,;\,(X-1)^2(X+1)\,;\,(X-1)(X+1)^2\,;\,(X+1)^3\big)$ est une base de E.
2) Déterminer la matrice de passage M de B_0 à B.
3) Calculer M^2.
4) En déduire la matrice de passage de B à B_0.

Exercice n°12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\, j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice n°13

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec n entier naturel non nul, on pose $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MA = BM\}$.

1) Montrer que Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) À quelle condition Ω contient-il une matrice inversible ?

Exercice n°14

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2.
2) En déduire que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3) Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.

Exercice n°15

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère $\varphi : P \to (X^2-1)P'' + 2XP'$.

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice n°16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, telle que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

Exercice n°17

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, on désigne par 0_4 la matrice carrée nulle d'ordre 4.

On suppose que : $A^2 \neq 0_4$ et $A^3 = 0_4$.

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ associé à A.

1) Justifier l'existence de : $x \in \mathbb{C}^4$, tel que $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{C}^4}$.
2) Montrer que $(\varphi^2(x), \varphi(x), x)$ est libre.
3) Soit a tel que $(\varphi^2(x), \varphi(x), x, a)$ soit une base de $\mathbb{C}^4$, déterminer la matrice B de φ dans cette base. (*ind. Penser à évaluer* B^3)
4) Quel est le rang de A ? (*ind. Penser au rang de* B)

Exercice n°18

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, et $B'(e_1 + 2e_2 + e_3,\ e_1 + 2e_2 + 2e_3,\ e_2 + 2e_3)$.

On donne la matrice de l'endomorphisme φ : $M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

Donner $M_{B'}(\varphi)$.

Exercice n°19 (oraux concours)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (-1,0,2)$ et $e_3 = (3,1,2)$ trois vecteurs de E.

1) Donner l'expression de $f(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
3) Vérifier que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
4) Soit A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (a) Quelle relation mathématique existe-t-il entre A et A' ?
   (b) Calculer A' de deux façons différentes.

Exercice n°20 (oraux concours)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n.
3) On souhaite résoudre le système d'équations : $\begin{cases} -x + y + z &= 2 \\ 2x - y &= 3 \\ y - z &= -1 \end{cases}$
   (a) Écrire ce système sous forme matricielle à l'aide de la matrice A.
   (b) Résoudre le système en utilisant la question 1.

Exercice n°21 (Navale PSI 2025)

On souhaite déterminer l'ensemble T des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M + M^T = \mathrm{tr}(M)A$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée.

1) Montrer que si $M \in A_n(\mathbb{R})$, alors $M \in T$.
2) Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq 2$, alors $T = A_n(\mathbb{R})$.
3) On suppose ici que $\mathrm{tr}(A) = 2$.
   (a) Montrer que si $M \in T$ avec $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, alors $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   (b) On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 2$ et $A \notin S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in A_n(\mathbb{R})$ tels que $M = \lambda A + V$.

Problème n°1 (Khôlle lycée Châtelet)

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À tout nombre réel x on associe la matrice

$$M(x) = I + x.A + \frac{x^2}{2}.A^2$$

1) Calculer A^2 et A^3 et en déduire, pour tout entier $n > 3$, la valeur de A^n.
2) Calculer en utilisant (1) le produit $M(x)M(y)$ et montrer que
$$M(x)M(y) = M(x + y)$$
3) Montrer que pour tout entier positif n : $\big(M(x)\big)^n = M(nx)$. Reconnaître $M(0)$.
4) Écrire les matrices $M(x)$ et $\big(M(x)\big)^n$ sous forme explicite.
5) Justifier l'inversibilité de la matrice $M(x)$ sans chercher à calculer son inverse.
6) Déterminer l'inverse de $M(x)$ en n'utilisant que la relation (2).
7) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire sous forme explicite les matrices B^{-1} et B^n.
8) Retrouver la valeur de B^{-1} en utilisant la méthode du pivot.
9) Conclure quant à une structure algébrique de l'ensemble $\{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

<u>Problème n°2</u>

Exercice 1

On donne les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3) Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par les relations de récurrence :

$$u_0 = 0\,; \quad v_0 = 1\,; \quad u_{n+1} = -u_n + v_n\,; \quad v_{n+1} = 2u_n$$

   Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $A^n = u_n A + v_n I_3$.
4) (a) On pose $x_n = u_n + v_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $x_n = 1$.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $y_n = 2u_n - v_n$. Montrer que la suite (y_n) est géométrique et préciser sa raison. Exprimer alors y_n en fonction de n.
   (c) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
5) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right].A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right].I_3$$

   Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?