Chapitre : « Déterminants »

M. Calciano

I. Déterminant d'une matrice

1) Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **déterminant de** A, noté $\det(A)$, et on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

la quantité définie par récurrence de la façon suivante :

- Si $n = 2$, alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$.
- Si $n > 2$, alors
$$\det(A) = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}),$$
où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de celle de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Donc, dans cette définition, le déterminant se développe uniquement par rapport à la première colonne ; on verra un peu après que l'on peut le développer suivant n'importe quelle ligne ou colonne.

Exemple :

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$.

Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0.$$

Remarque : ceci n'est pas une coïncidence : B possède deux colonnes identiques (les colonnes 1 et 2), donc $\det(B) = 0$ d'après la propriété qui sera énoncée au 4).

Remarque (complément culturel) : on démontre, par récurrence sur n, que cette définition coïncide avec la formule de Leibniz

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

où S_n est l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ. Cette formule, hors-programme en première année, justifie en particulier que le déterminant ne dépend pas de la colonne ou de la ligne par rapport à laquelle on choisit de le développer (cf. 5)).

2) Proposition

Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes.

Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \alpha a_{1,j} + b_1 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \alpha a_{n,j} + b_n & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & b_1 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & b_n & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque : de façon générale, $\det(\alpha A + B) \neq \alpha \det(A) + \det(B)$ (la linéarité n'est valable que colonne par colonne, et non globalement par rapport à la matrice).

Démonstration :

Évidente lorsqu'on aura vu que le déterminant peut se développer par rapport à n'importe quelle colonne j (cf. 5)) : il suffit alors d'appliquer la linéarité du déterminant, vu comme somme de termes $(-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$, par rapport aux coefficients $a_{i,j}$ d'une colonne j fixée, les mineurs $A_{i,j}$ ne dépendant pas de cette colonne. ■

3) Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit des éléments de la diagonale.

Démonstration :

Immédiate par récurrence ! Si A est triangulaire (supérieure, par exemple) de taille n, le développement par rapport à la première colonne ne fait intervenir que le terme $i = 1$ (les autres coefficients $a_{i,1}$, $i > 1$, sont nuls), donc $\det(A) = a_{1,1} \det(A_{1,1})$, où $A_{1,1}$ est encore triangulaire supérieure, de taille $n - 1$, de diagonale $(a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$. On conclut par hérédité. ■

4) Propriétés

Si A possède deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.

Si on permute deux colonnes de A, alors le déterminant est changé en son opposé.

Remarque : les propriétés restent vraies en remplaçant le mot colonne par ligne.

Démonstration :

On procède par récurrence sur n.

Pour le premier point : si A a deux colonnes identiques, on développe selon une colonne non identique aux deux premières (qui existe dès que $n \geq 3$; pour $n = 2$ le résultat est immédiat), et chaque mineur ainsi obtenu possède encore deux colonnes identiques, donc est nul par hypothèse de récurrence.

Pour le second point, désignons par $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A et montrons que permuter C_1 et C_2 change le déterminant en son opposé (le cas général s'en déduit en renumérotant). Il suffit de développer

$$\det(C_1 + C_2,\ C_1 + C_2,\ C_3, \dots, C_n).$$

D'une part, cette quantité est nulle car la matrice possède deux colonnes identiques (premier point). D'autre part, par bilinéarité par rapport aux deux premières colonnes (2)),

$$\begin{aligned}\det(C_1+C_2,\,C_1+C_2,\,C_3,\dots,C_n) &= \det(C_1,C_1,C_3,\dots,C_n)+\det(C_1,C_2,C_3,\dots,C_n)\\ &\quad+\det(C_2,C_1,C_3,\dots,C_n)+\det(C_2,C_2,C_3,\dots,C_n)\\ &= 0+\det(C_1,C_2,C_3,\dots,C_n)+\det(C_2,C_1,C_3,\dots,C_n)+0,\end{aligned}$$

les deux derniers termes de la première ligne étant nuls par le premier point.

Donc $\det(C_1,C_2,C_3,\dots,C_n)+\det(C_2,C_1,C_3,\dots,C_n)=0$, *c'est-à-dire* $\det(C_1,C_2,C_3,\dots,C_n)=-\det(C_2,C_1,C_3,\dots,C_n)$. ■

5) Proposition (admise)

Le déterminant d'une matrice A peut se développer par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.

Ainsi :

Par rapport à la colonne j :

$$\det(A)=\sum_{i\in[\![1,n]\!]}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det(A_{i,j}),$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de celle de A, en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Ou par rapport à la ligne i :

$$\det(A)=\sum_{j\in[\![1,n]\!]}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det(A_{i,j}),$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de celle de A, en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Remarque : ce résultat, admis en première année (sa preuve rigoureuse repose sur la formule de Leibniz évoquée au 1)), est extrêmement utile en pratique : pour calculer un déterminant à la main, on choisit toujours de développer selon la ligne ou la colonne contenant le plus de zéros.

Exemple : Calculer $\begin{vmatrix}1&2&0&3\\4&1&0&8\\1&2&3&4\\4&5&0&6\end{vmatrix}$.

On voit que la troisième colonne possède 3 zéros, il sera donc plus pratique de développer par rapport à cette colonne.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&2&0&3\\4&1&0&8\\1&2&3&4\\4&5&0&6\end{vmatrix} &= 0\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&1&8\\1&2&4\\4&5&6\end{vmatrix}+0\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&4\\4&5&6\end{vmatrix}\\ &\quad+3\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2&3\\4&1&8\\4&5&6\end{vmatrix}+0\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&2&3\\4&1&8\\1&2&4\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \left(\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \right) = 3\times(-34+12+52) = 90.$$

6) Proposition

Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration :

Il suffit de développer le déterminant selon cette colonne : si $C_j = \sum_{k\neq j} \lambda_k C_k$, alors par linéarité (2)),

$$\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) = \sum_{k\neq j} \lambda_k \det(C_1, \dots, \underbrace{C_k}_{\text{en position } j}, \dots, C_n),$$

et chacun des déterminants de la somme possède deux colonnes identiques (la colonne C_k apparaît à la fois en position k et en position j), donc est nul d'après 4). Ainsi $\det(A) = 0$. ■

7) Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **et** $\lambda \in \mathbb{K}$**, alors** $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$**.**

Démonstration :

Par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, $\det(\lambda A) = \lambda a_{1,1} = \lambda^1 \det(A)$.

Supposons la propriété vraie pour les matrices de taille $n-1$. Les coefficients de λA sont $\lambda a_{i,j}$, et les mineurs de λA obtenus en supprimant une ligne et une colonne sont les matrices $\lambda A_{i,1}$, de taille $n-1$. En développant par rapport à la première colonne,

$$\det(\lambda A) = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} (-1)^{i+1}(\lambda a_{i,1}) \det(\lambda A_{i,1}) = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} (-1)^{i+1}\lambda a_{i,1}\, \lambda^{n-1} \det(A_{i,1}) = \lambda^n \det(A),$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence sur les mineurs de taille $n-1$. ■

8) Déterminant et opérations élémentaires

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

- Le déterminant de A reste inchangé si l'on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A : $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.
- Le déterminant de A est changé en son opposé si l'on permute deux colonnes de A : $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Le déterminant de A est multiplié par α si l'on multiplie une colonne de A par α : $C_i \leftarrow \alpha C_i$.

Mêmes effets pour les opérations élémentaires sur les lignes.

Démonstration :

Les trois points se déduisent directement des propriétés déjà établies, sans qu'il soit nécessaire d'invoquer la multiplicativité du déterminant (cf. 9)) :

- *Par linéarité par rapport à la colonne i (2)),*

  $$\det(\dots, C_i + \alpha C_j, \dots) = \det(\dots, C_i, \dots) + \alpha \det(\dots, \underbrace{C_j}_{\text{en position } i}, \dots, C_j, \dots),$$

  et ce dernier déterminant possède deux colonnes identiques (C_j apparaît en position i et en position j), donc est nul d'après 4). Le déterminant est donc inchangé.
- *C'est exactement la seconde propriété établie au 4).*
- *C'est un cas particulier immédiat de la linéarité par rapport à une colonne (2)), avec $b = 0$.*

Les mêmes arguments, appliqués aux lignes (le développement par rapport à une ligne, valable d'après 5), joue un rôle symétrique à celui des colonnes), donnent les mêmes effets pour les opérations élémentaires sur les lignes. ■

Exemple :

Calculer $\det(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 8 & -8 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = 4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow \tfrac{1}{4}L_3)$$

$$= 4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1.$$

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première colonne des matrices restantes,

$$\det(A) = 4\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 \times 2\det\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \times 3\det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 8(8-3) + 12(-12+4) = 40 - 96 = -56.$$

Remarque : deux élèves souhaitent calculer $\det \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; le premier développe par rapport à la première colonne et obtient 2, le second commence par faire l'opération $C_1 \leftarrow 2C_1 - C_2$ et obtient 4... Est-ce normal ?

(Indication : l'opération $C_1 \leftarrow 2C_1 - C_2$ n'est pas une opération élémentaire au sens du présent paragraphe — elle combine une dilatation de C_1 par 2 avec un ajout de $-C_2$ — et multiplie donc le déterminant par 2 en plus de le laisser inchangé par l'ajout. Le second élève a donc bien calculé le déterminant de la nouvelle *matrice, qui vaut le double de celui de la matrice de départ : $4 = 2 \times 2$. Il n'y a donc pas de contradiction, à condition de bien identifier l'effet réel de l'opération effectuée sur les colonnes.)*

9) Proposition

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, alors $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration :

On se contente de la faire dans le cas où $n = 3$, le principe se généralisant sans difficulté (voir la remarque ci-dessous pour une preuve complète, valable pour tout n).

On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}$, et on désigne par C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

$$AB = (b_1C_1 + b_4C_2 + b_7C_3 \ ; \ b_2C_1 + b_5C_2 + b_8C_3 \ ; \ b_3C_1 + b_6C_2 + b_9C_3).$$

En développant le déterminant de AB par multilinéarité par rapport à ses trois colonnes, tous les termes où une même colonne C_k de A apparaît deux fois sont nuls (4)), et il ne reste que les termes correspondant aux permutations de $(1, 2, 3)$:

$$\det(AB) = \big(b_1(b_5b_9 - b_6b_8) - b_4(b_2b_9 - b_3b_8) + b_7(b_2b_6 - b_3b_5)\big)\det(C_1, C_2, C_3).$$

On reconnaît, dans le facteur entre parenthèses, exactement le développement de $\det(B)$ par rapport à sa première ligne. Donc $\det(AB) = \det(B)\det(A) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$. ■

Remarque (preuve générale, valable pour tout n) : fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et considérons l'application $\varphi : (C_1, \ldots, C_n) \mapsto \det(AC_1, \ldots, AC_n)$, où $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{K}^n$ désignent les colonnes d'une matrice B. L'application φ est n-linéaire (car $X \mapsto AX$ est linéaire) et alternée (si $C_i = C_j$, alors $AC_i = AC_j$ et $\det(AB)$ a deux colonnes égales, donc est nul). D'après le théorème admis au III.3), φ est donc proportionnelle au déterminant : $\varphi(B) = \varphi(I_n)\det(B) = \det(A)\det(B)$, c'est-à-dire $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, et ceci pour tout $n \geq 1$.

10) Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration :

($\Rightarrow$) A est inversible s'il existe B telle que $AB = I_n$.

$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I_n) = 1$ *(il suffit de développer le déterminant de l'identité par rapport à la première colonne, ou d'utiliser 3)).*

Donc $\det(A) \neq 0$.

(⇐) *Supposons* $\det(A) \neq 0$.

On pose $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On construit la matrice* B *telle que* $B_{i_0,j_0} = (-1)^{i_0+j_0}\det(A_{j_0,i_0})$, *où* A_{i_0,j_0} *est obtenue à partir de* A *en supprimant la ligne* i_0 *et la colonne* j_0.

Soit $C = AB$. *On a*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{k+j}\det(A_{j,k}).$$

Si $i = j$ ***:*** $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{k+i}\det(A_{i,k}) = \det(A)$, *par développement de* $\det(A)$ *selon la ligne* i *(5)).*

Si $i \neq j$ ***:*** *construisons une matrice* D *égale à* A, *sauf que sa* j*-ème colonne est remplacée par la* k*-ème colonne de* A *; ainsi* D *a deux colonnes identiques (la colonne* k, *recopiée en position* j*), donc* $\det(D) = 0$.

Or, en développant $\det(D)$ *par rapport à sa* j*-ème colonne (qui est celle de* $A_{i,k}$*),*

$$0 = \det(D) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,j}(-1)^{i+j}\det(D_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j}) = c_{i,j},$$

puisque $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{k+j}\det(A_{j,k})$ *est exactement ce développement (à l'échange des rôles de* i, j, k *près).*

D'où $C = AB = \det(A)I_n$, *c'est-à-dire* $A\left(\dfrac{1}{\det(A)}B\right) = I_n$. *Comme* A *est une matrice carrée, disposer d'un inverse à droite suffit pour conclure que* A *est inversible, d'inverse* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}B$ *(cf. 12)).* ■

11) Proposition

On a : $\det(A) = \det({}^tA)$**.**

Démonstration :

Si A *n'est pas inversible, alors* ${}^tA$ *n'est pas inversible non plus (car* $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$*), donc* $\det(A) = \det({}^tA) = 0$ *d'après 10).*

Si A *est inversible, par l'algorithme de Gauss-Jordan, on peut ramener, par opérations élémentaires, la matrice* A *à l'identité (c'est d'ailleurs l'une des méthodes pour calculer l'inverse).*

Ces opérations élémentaires se traduisent matriciellement par des multiplications par des matrices de transvection $T_{i,j}$ *et des matrices de dilatation* $D_i(a)$.

Précisément : $T_{i,j}A$ *ajoute la* j*-ème ligne à la* i*-ème ligne (et* $AT_{i,j}$ *ajoute la* i*-ème colonne à la* j*-ème).* $D_i(a)A$ *multiplie la* i*-ème ligne par* a *(et* $AD_i(a)$ *multiplie la* i*-ème colonne par* a*).*

On a : $T_{i,j} = I_n + E_{i,j}$ *(où* $E_{i,j}$ *est la matrice élémentaire dont le seul coefficient non nul, égal à* 1*, est en position* (i,j)*), et donc,* $T_{i,j}$ *étant triangulaire de diagonale uniquement composée de* 1*,* $\det(T_{i,j}) = 1 = \det({}^tT_{i,j})$ *(car* ${}^tT_{i,j} = T_{j,i}$ *est aussi triangulaire de diagonale unité). De même,* $D_i(a)$ *est la matrice identité où le coefficient* (i,i) *est remplacé par* a *; elle est symétrique, donc* $\det(D_i(a)) = \det({}^tD_i(a)) = a$*.*

On a : $A = E_1 \cdots E_N$*, où les matrices* E_k *sont des matrices de transvection ou de dilatation. Alors* ${}^tA = {}^tE_N \cdots {}^tE_1$*, et par multiplicativité du déterminant (9)),*

$$\det(A) = \det(E_1)\cdots\det(E_N) = \det({}^tE_1)\cdots\det({}^tE_N) = \det({}^tE_N)\cdots\det({}^tE_1) = \det({}^tA),$$

le déterminant étant à valeurs dans $\mathbb{K}$*, donc commutatif pour le produit.* ■

12) Cofacteur, comatrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$.

On rappelle que A_{i_0,j_0} est obtenue à partir de A en supprimant la ligne i_0 et la colonne j_0.

On appelle **cofacteur** $C_{i_0,j_0} = (-1)^{i_0+j_0}\det(A_{i_0,j_0})$.

On définit la **comatrice de** A, $\text{com}(A)$, la matrice de terme général $(C_{i,j})$ avec $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Proposition : on a ${}^t\text{com}(A)\,A = \det(A)I_n$**.**

En particulier, si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t\text{com}(A)$.

Démonstration :

Il suffit de reprendre le calcul mené au 10) : on y a montré que la matrice B *de terme général* $B_{i_0,j_0} = (-1)^{i_0+j_0}\det(A_{j_0,i_0})$ *vérifie* $AB = \det(A)I_n$*. Or, par définition,* $B_{i_0,j_0} = C_{j_0,i_0}$*, c'est-à-dire* $B = {}^t\text{com}(A)$*. D'où* $A\,{}^t\text{com}(A) = \det(A)I_n$*.*

Il reste à vérifier l'égalité dans l'autre sens, ${}^t\text{com}(A)A = \det(A)I_n$ *: elle s'obtient de façon identique en développant, cette fois, par rapport aux colonnes plutôt qu'aux lignes (le rôle de* i *et* j *étant échangé dans le calcul du 10)).*

Si A *est inversible,* $\det(A) \neq 0$ *(10)), et l'égalité* $A\,{}^t\text{com}(A) = \det(A)I_n$ *se réécrit* $A\left(\dfrac{1}{\det(A)}{}^t\text{com}(A)\right) = I_n$*, d'où* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t\text{com}(A)$*.* ■

Remarque (lien avec les systèmes linéaires) : la formule précédente permet de retrouver les formules de Cramer : si $AX = Y$ *avec* A *inversible, alors* $X = A^{-1}Y = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t\text{com}(A)\,Y$*, et l'on montre que la* i*-ème coordonnée de* X *s'écrit* $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$*, où* A_i *est la matrice* A *dont la* i*-ème colonne a été remplacée par* Y*. Cette méthode, élégante en théorie, est en pratique très coûteuse en calculs dès que* n *est grand (le calcul d'un déterminant par cofacteurs coûte de l'ordre de* $n!$ *opérations), et on lui préfère, numériquement, la méthode du pivot de Gauss (8)), de coût de l'ordre de* n^3*.*

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{com}(A)$, et, s'il existe, déterminer A^{-1}.

II. Déterminant d'un endomorphisme

Soit B et B' deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.

Soit P la matrice de passage de B à B'.

Soit f un endomorphisme de E dont la matrice relative à B est A, et la matrice relative à B' est A'.

On a : $A = PA'P^{-1}$, or $\det(PA'P^{-1}) = \det(A'P^{-1}P) = \det(A')$ d'après 9), soit : $\det(A) = \det(A')$.

Cette égalité justifie la définition suivante : le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie pour le représenter.

1) Définition

   Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors on définit le déterminant de f comme le déterminant de sa matrice représentative dans n'importe quelle base de E, et on le note $\det(f)$, puisqu'il est indépendant de la base choisie.

2) Propriétés

   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

   - $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
   - $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
   - $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$, et donc $\det(g \circ f) = \det(f \circ g)$.
   - f est bijective si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$. De plus, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

   Démonstration :

   Soit A la matrice de f dans une base B de E, et A' celle de g.

   - *La matrice de Id_E dans B est I_n, dont le déterminant vaut 1 (matrice triangulaire de diagonale composée de 1, cf. 3)).*
   - *La matrice de λf dans B est λA, donc $\det(\lambda f) = \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) = \lambda^n \det(f)$ d'après 7).*
   - *La matrice de $g \circ f$ dans B est $A'A$, donc $\det(g \circ f) = \det(A'A) = \det(A')\det(A) = \det(g)\det(f)$ d'après 9), et $\det(g)\det(f) = \det(f)\det(g) = \det(f \circ g)$ car $\det(f), \det(g) \in \mathbb{K}$.*
   - *f est bijective si, et seulement si, sa matrice A dans une base quelconque est inversible (résultat classique sur les endomorphismes en dimension finie), ce qui équivaut à $\det(A) = \det(f) \neq 0$ d'après 10). Si f est bijective, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$, donc $\det(f)\det(f^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1$, d'où $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.*

   ■

III. Complément : déterminant d'une n-forme linéaire alternée

1) Définition

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $n \geq 2$. Une application $\varphi : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Une application φ **est dite alternée** si, pour tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$,

pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ vérifiant $1 \leq i < j \leq n$ et $a_i = a_j$, alors $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = 0_F$.

Notation : lorsque F est le corps des scalaires $\mathbb{K}$, on dit que φ est une forme n-linéaire sur E, et on note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

2) Antisymétrie

Une application $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire et alternée est antisymétrique, c'est-à-dire que pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, et pour tous les entiers i, j vérifiant $1 \leq i < j \leq n$:

$$\textbf{on a } \varphi(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -\varphi(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n).$$

Démonstration :

Il suffit de calculer et de développer $\varphi(u_1, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_n)$, où la quantité $u_i + u_j$ est placée à la fois en position i et en position j.

D'une part, cette quantité est nulle, φ étant alternée et les positions i et j étant occupées par le même vecteur.

D'autre part, par n-linéarité par rapport aux positions i et j,

$$\begin{aligned}\varphi(u_1, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_n) &= \varphi(\ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots) + \varphi(\ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots) \\ &\quad + \varphi(\ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots) + \varphi(\ldots, u_j, \ldots, u_j, \ldots) \\ &= 0 + \varphi(\ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots) + \varphi(\ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots) + 0,\end{aligned}$$

les deux termes extrêmes étant nuls car φ est alternée (positions i, i et j, j occupées par un même vecteur).

D'où $\varphi(\ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots) + \varphi(\ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots) = 0$, ce qui est le résultat annoncé.

(On retrouve ici exactement le même argument que celui utilisé au I.4) pour les colonnes d'une matrice — ce qui n'est pas un hasard, le déterminant étant lui-même une forme n-linéaire alternée, cf. IV.2).) ■

3) Théorème (admis)

Soit B une base de E, soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée, alors $\varphi = \varphi(B) \det_B$.

Remarque : cette relation traduit le fait que toute forme n-linéaire alternée est proportionnelle au déterminant. *Ce résultat, admis en première année, repose sur le fait que l'espace $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est une droite vectorielle (de dimension 1) : tout élément de $\Lambda_n(E)$ est donc un multiple scalaire d'un élément non nul fixé, ici $\det_B$.*

IV. Déterminant d'une famille de vecteurs

1) Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $B = (e_1; \dots; e_n)$ une base de E.

Pour toute famille $F = (x_1; \dots; x_n)$ de vecteurs de E, on définit $\det(F) = \det_B(F)$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice formée par concaténation des vecteurs-coordonnées de $x_1; \dots; x_n$ dans la base B.

Remarque : le déterminant d'une famille de vecteurs dépend donc de la base choisie.

Remarque (interprétation géométrique) : dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, $\left|\det(x_1, \dots, x_n)\right|$ représente le volume (n-dimensionnel) du parallélépipède construit sur les vecteurs $x_1, \dots, x_n$. Le signe du déterminant, lui, indique l'orientation de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à la base B.

2) Théorème

Soit B une base de l'espace vectoriel E de dimension finie.

On définit l'application $\det_B : E \times \cdots \times E \to \mathbb{K}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_B(x_1, \dots, x_n)$; c'est une forme n-linéaire, alternée (et antisymétrique).

Démonstration :

Par définition, $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $x_1, \dots, x_n$ dans B.

La n-linéarité de $\det_B$ est alors exactement la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses colonnes, établie au I.2).

Le caractère alterné de $\det_B$ découle du fait que, si $x_i = x_j$ pour $i \neq j$, la matrice associée possède deux colonnes identiques, donc son déterminant est nul d'après I.4).

L'antisymétrie en découle alors immédiatement par le théorème du III.2), $\det_B$ étant une forme n-linéaire alternée. ■

Remarque : pour une n-forme linéaire, antisymétrique $\Leftrightarrow$ alternée (l'implication directe étant celle du III.2), la réciproque résultant, en caractéristique différente de 2, de l'application de l'antisymétrie au cas $u_i = u_j$, ce qui donne $\varphi(\dots) = -\varphi(\dots)$, soit $2\varphi(\dots) = 0$, donc $\varphi(\dots) = 0$).

3) Proposition

Une famille $(x_1; \dots; x_n)$ de E est une base de E si, et seulement si, $\det_B(x_1; \dots; x_n) \neq 0$.

Démonstration :

Soit $B' = (x_1; \dots; x_n)$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, alors $\det_{B'}$ et $\det_B$ sont deux formes n-linéaires alternées sur E, donc proportionnelles d'après III.3) : il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, $\det_{B'}(u_1, \dots, u_n) = \alpha \det_B(u_1, \dots, u_n)$, en particulier pour $(u_1, \dots, u_n) = (x_1, \dots, x_n)$.

On a $\det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \alpha \det_B(x_1, \dots, x_n)$, or $\det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = 1$ (déterminant d'une base dans elle-même, c'est-à-dire de l'identité). Donc $\alpha = \dfrac{1}{\det_B(x_1, \dots, x_n)} =$

$\frac{1}{\det_B(B')}$, *et l'on obtient, pour tout* $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$:

$$\det_B(B') \cdot \det_{B'}(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, \ldots, u_n).$$

Remarque : si $(u_1, \ldots, u_n)$ *correspond aux vecteurs de* B *dans cette égalité, on obtient* $\det_{B'}(B) \det_B(B') = 1$.

Sens (⇒) *: si* $(x_1, \ldots, x_n)$ *est une base, l'égalité précédente donne* $\det_{B'}(B) \det_B(B') = 1$*, donc* $\det_B(B') \neq 0$*, c'est-à-dire* $\det_B(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Sens (⇐) *: on procède par contraposée. Supposons que* $(x_1, \ldots, x_n)$ *ne soit* pas *une base de* E *; comme* $\mathrm{card}(x_1, \ldots, x_n) = n = \dim(E)$*, cela signifie que la famille n'est pas libre, donc l'un des vecteurs* x_j *s'exprime comme combinaison linéaire des autres :* $x_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k x_k$. *Par linéarité de* $\det_B$ *par rapport à sa* j*-ème variable,*

$$\det_B(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = \sum_{k \neq j} \lambda_k \det_B(x_1, \ldots, \underbrace{x_k}_{\text{en position } j}, \ldots, x_n),$$

et chacun des déterminants de la somme s'annule car x_k *y apparaît deux fois (en position* k *et en position* j*), donc* $\det_B(x_1, \ldots, x_n) = 0$. *Par contraposition, on obtient bien l'implication réciproque.* ■

V. Exercices

Exercice n°1

Déterminer à chaque fois la forme factorisée du déterminant (on précise que a, b, c désignent trois réels)

$$A = \det \begin{pmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{pmatrix} \qquad B = \det \begin{pmatrix} a+b & b+c & a+c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3+c^3 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c trois réels.

Soit x un réel ; exprimer $\det(xI_3 - A)$ sous la forme d'un polynôme en x développé.

Exercice n°3

Même consigne que dans l'exercice n°2 avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n°4

Soit n et p deux entiers naturels non nuls avec $n > p$.

Que vaut $\det(AB)$ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$?

Exercice n°5

La famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $(2,1,0)$; $(1,3,1)$ et $(5,2,1)$ est-elle libre ? (On utilisera deux méthodes différentes.)

Exercice n°6

Soit J_n la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $\det(J_n - I_n)$.

Exercice n°7

Soit $s_1, s_2, \ldots, s_n$ n réels.
Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \ldots & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \ldots & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \end{vmatrix}.$$

Indication : $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$; $\ldots$; $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

Exercice n°8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que son inverse soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice n°9

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit A la matrice représentative d'un endomorphisme de E.
Montrer que :

1) $\mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n$;

2) $\mathrm{rg}(A) = n-1 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$;

3) $\mathrm{rg}(A) \leq n-2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0$.

Exercice n°10

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, et soit $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.
(Indication. On montrera que $x \mapsto \det(A + xJ)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, en retranchant la première ligne aux lignes suivantes, et pair.)

Exercice n°11

Étant donné les scalaires $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, on définit le déterminant

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

1) Montrer que $x \mapsto V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

2) Démontrer que $V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

(Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.)

Exercice n°12

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Que dire de la dimension de E ?

Exercice n°13 (INP 2024)

Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tous réels a et b, on considère la matrice tridiagonale à n lignes et n colonnes :

$$T_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

L'objectif principal du problème est de s'intéresser à l'inversibilité de cette matrice en fonction des paramètres n, a et b.
On fixe ici des réels a et b non nuls, et on pose $d_n = \det(T_n(a,b))$ pour tout $n \geq 2$.

5. (a) En justifiant vos calculs, montrer que pour tout $n \geq 4$,
$$d_n = a d_{n-1} + b^2 d_{n-2}.$$
   (b) Comment appelle-t-on une telle suite (d_n) définie de la sorte ?

6. On suppose ici que $a = 3$ et $b = 2$.
   (a) Donner d_2 et d_3.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$,
$$d_n = \frac{1}{5} \times \left((-1)^n + 4^{n+1}\right).$$
   (c) En déduire que $T_n(3,2)$ est inversible pour tout $n \geq 2$.