

Chapitre 22 : Les séries

M. Calciano

I Généralités

I.1 Définition

Étant donné une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de nombres réels ou complexes, on associe la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *série de terme général* u_n . On la note simplement $\sum u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée *somme partielle d'indice* n de $\sum u_n$.

Remarque : il est très facile de retrouver u_n à partir de S_n . En effet :

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad u_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{si } n \geq 1.$$

I.2 Convergence

I.2.1 Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ est dite *convergente* si la suite des sommes partielles (S_n) l'est.

Dans ce cas, la *somme de la série* est la limite des sommes partielles. On note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série est *divergente*.

Exemple : Soit u la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$. Alors

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} - 1}{2} = +\infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice : Montrer que $\sum_{k \geq 3} \frac{1}{2^k}$ converge et déterminer sa somme.

I.2.2 Théorème dit de condition nécessaire de convergence

Soit $\sum u_n$ une série numérique.

Si la série $\sum u_n$ converge alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Si la suite (u_n) n'est pas convergente de limite nulle alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

On a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme S_n converge, S_n et S_{n-1} ont la même limite, donc u_n tend vers 0.

Attention : la convergence du terme général vers 0 ne suffit pas à établir la convergence de la série. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

En effet, si elle convergeait alors S_{2n} et S_n auraient la même limite, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. Or

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

I.2.3 Théorème comparaison suite-série

Soit (a_n) et (b_n) deux suites numériques telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a_{n+1} - a_n.$$

Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_0.$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite S_n converge. Or $S_n = a_{n+1} - a_0$. Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

I.3 Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Le reste d'indice n de $\sum u_n$ est défini par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n.$$

De plus, la suite (R_n) est convergente de limite nulle.

I.4 Opérations algébriques sur les séries convergentes

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques, $\lambda \in \mathbb{K}$ et n_0 un entier naturel.

— Si $\sum u_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

— Si $\sum u_n$ converge alors $\sum \lambda u_n$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

— Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Montrons que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Supposons que $\sum(u_n + v_n)$ converge. Alors $\sum_{n=1}^N (u_n + v_n)$ converge. Or

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N (u_n + v_n) - \sum_{n=1}^N u_n,$$

et donc $\sum v_n$ convergerait, ce qui est une contradiction.

II Séries à termes positifs

II.1 Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. On note (S_n) la suite des sommes partielles.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.

Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Sinon, la série diverge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

La suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Réciproquement, si (S_n) converge, comme elle est croissante, elle est majorée par sa limite.

II.2 Comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $0 \leq u_n \leq v_n$.

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

— Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Il suffit de revenir aux sommes partielles.

Exemple : Comme $0 \leq \frac{1}{1+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ et que la série géométrique de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{1+2^n}$ converge également.

II.3 Règle dite des équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Si $u_n \sim v_n$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel

$$0 \leq \frac{u_n}{2} \leq v_n \leq 2u_n,$$

et on revient aux sommes partielles.

Exemple : Comme $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, et que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

II.4 Règle dite des comparaisons

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

— **Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge.**

— **Si $\sum v_n$ converge et $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge.**

Montrons que si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge.

Si $u_n = O(v_n)$, il existe un rang n_0 et un réel K tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq K v_n$.

D'où

$$\sum_{n=n_0}^N u_n \leq K \sum_{n=n_0}^N v_n.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^N u_n \leq K \sum_{n=n_0}^N v_n + \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n \leq K \sum_{n=0}^{+\infty} v_n + \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n.$$

Donc la suite des sommes partielles est croissante et majorée, donc elle converge.

II.5 Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive.

Alors :

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

Ce qui donne, en appliquant la relation de Chasles :

$$f(0) + \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt,$$

ou simplement :

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt.$$

III Séries de référence

III.1 Séries géométriques

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$.

Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Si $|z| \geq 1$, alors $\sum z^n$ diverge grossièrement. Sinon, $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$.

III.2 Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement. Si $\alpha > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, décroissante et positive sur $]0, +\infty[$. Par comparaison série-intégrale :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = 1 + \frac{1}{\alpha-1} (1 - n^{1-\alpha}).$$

Le cas $\alpha \leq 1$ est laissé au lecteur.

III.3 Règle de Riemann

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes de signes constants (au moins à partir d'un certain rang).

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow L \in \mathbb{R}^*$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow L \in \mathbb{R}^*$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow \pm\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice :

Soit $\sum u_k$ avec $u_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Déterminer la convergence de la série par :

- a) comparaison avec une série de Riemann ;
- b) application de la règle de Riemann.

Un élève écrit :

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)} \rightarrow 0, \quad \text{donc } \frac{1}{(k+1)(k+2)} = o\left(\frac{1}{k}\right) \text{ et la série diverge.}$$

Que peut-on en penser ?

III.4 Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ converge et on appelle L sa limite.

Alors, si $L > 1$, $\sum u_k$ diverge. Alors, si $L < 1$, $\sum u_k$ converge. Alors, si $L = 1$, on ne peut pas conclure avec le critère de d'Alembert.

Exercice :

Démontrer que pour tout $x > 0$, $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge. Il s'agit de l'exponentielle !

IV Exercices

Exercice n°1

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

Exercice n°2

Déterminer la nature de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}.$$

Exercice n°3

Établir la convergence et déterminer la somme de chacune des séries suivantes :

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)};$$

$$2) \sum \frac{n^2 + n - 1}{n!} \text{ (on admettra que } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \text{);}$$

$$3) \sum (n^2 + n + 1)e^{-n} \text{ (indication : étudier la fonction } x \mapsto \sum_{n=0}^N e^{-nx} \text{).}$$

Exercice n°4

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et convergente. Montrer que $\sum u_n^2$ est convergente.

Exercice n°5

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer la divergence de

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}.$$

Exercice n°6

Montrer la convergence et calculer la somme de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n(n+2)}.$$

Exercice n°7

Étudier la série de terme général :

$$u_n = n^{3/2} \left(\tan \left(\frac{1}{n} \right) - \sinh \left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

Exercice n°8

Étudier la série de terme général :

$$u_n = n^{1/n} - (n+1)^{1/(n+1)}.$$

Exercice n°9

Soit la série de terme général :

$$u_n = e^{-n^\alpha}.$$

- 1) Montrer que pour $\alpha \leq 0$, la série $\sum u_n$ diverge.
- 2) On suppose que $\alpha > 0$. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice n°10

Montrer que **la suite** définie par le terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$$

converge.

Exercice n°11

Soit a et b deux nombres réels.

- 1) Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

- 2) Lorsque la série converge, donner la somme.

Exercice n°12

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge et donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.

Exercice n°13

Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^3}.$$

Exercice n°14

Soit n un entier naturel non nul, $\alpha > 1$. Donner un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Exercice n°15

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $u_n = \ln \left(\cos \left(\frac{x}{2^n} \right) \right)$ pour n entier non nul.

1) Montrer que $\sum u_n$ converge.

2) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Exercice n°16

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et à termes positifs.

Montrer que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice n°17

1) Soit $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$. Étudier la convergence de

$$\sum \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \right).$$

2) Étudier la convergence de $\sum (\ln(n+1) - \ln n)$.

3) Retrouver la nature des séries de Riemann.

Exercice n°18

Soit $\alpha > 0$. On pose pour n entier naturel non nul,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha},$$

et pour $\alpha > 1$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1) Pour $0 < \alpha < 1$, déterminer un équivalent de S_n .

2) Pour $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de R_n .

Exercice n°19

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- 1) Montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

Indication : On supposera d'abord $\alpha > 1$. On introduira la suite $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ avec $1 < \beta < \alpha$. On montrera en particulier que $\frac{u_n}{v_n}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

- 2) Étudier la série

$$\sum \frac{1 \times 4 \times 7 \times \cdots \times (3n - 2)}{3^{n!}}.$$

Exercice n°20 (oraux de concours)

Soit $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
 2) En déduire que $\sum u_n^2$ converge et donner la somme de cette série.