

Chapitre 10 : Les suites

M. Calciano

I. Les réels

1) Définition

Soit A une partie de \mathbb{R} .

La borne supérieure de A est, s'il existe, le plus petit des majorants de A . Elle se note $\sup A$.

La borne inférieure de A est, s'il existe, le plus grand des minorants de A . Elle se note $\inf A$.

Remarque : Si les réels $\inf A$ et $\sup A$ existent, alors $\inf A \leq \sup A$.

Attention : Ne pas confondre les notions de plus grand élément de A (noté $\max A$) et de borne supérieure de A .

Si A possède un plus grand élément, alors $\sup A = \max A$; en revanche, si A possède une borne supérieure $\sup A$, on n'a pas nécessairement de plus grand élément.

Ex : $]0 ; 1[$.

La remarque reste valable pour $\inf A$ et $\min A$.

2) Propriétés (admisses)

Toute partie non vide de \mathbb{R} et majorée possède sa borne supérieure.

Toute partie non vide de \mathbb{R} et minorée possède sa borne inférieure.

Ex : L'intervalle $I =]a ; b[$ (pour a et b réels) admet a comme borne inférieure et b comme borne supérieure.

3) Théorème

Soit A une partie de \mathbb{R} , et M un réel, alors on a $M = \sup A$ si et seulement si :

$$\forall x \in A, x \leq M \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x$$

De même :

Soit A une partie de \mathbb{R} , et m un réel, alors on a $m = \inf A$ si et seulement si :

$$\forall x \in A, m \leq x \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \varepsilon$$

Démonstration : Le premier point précise que « a » est un majorant, et le second point que c'est le plus petit...

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon < x$.

Exemple : Quelle est la borne inférieure de $A = \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$?

4) Intervalles de \mathbb{R}

Les intervalles de \mathbb{R} sont exactement les parties I de \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, [x; y] \subset I$$

Démonstration : Clairement, si I est un intervalle, alors I vérifie $\forall x \in I, \forall y \in I, [x; y] \subset I$.

Supposons que I vérifie : $\forall x \in I, \forall y \in I, [x; y] \subset I$.

Soit a et b les bornes inférieure et supérieure de I , éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

Il y a 9 cas à distinguer selon que $b \in \mathbb{R} \setminus I, b \in I$ ou $b = +\infty$, et de même pour a !

Et on constate bien que I est de la forme (a, b) (la parenthèse correspondant à un crochet ouvert ou fermé selon le cas).

5) Densité

Soient x et y deux réels tels que $x < y$:

Il existe un nombre rationnel r dans l'intervalle $]x ; y[$.

Il existe un nombre irrationnel ξ dans l'intervalle $]x ; y[$.

Remarque : Cela permet de construire \mathbb{R} comme « une extension de \mathbb{Q} ».

On dit que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

II. Les suites

1) Définition

On appelle suite de nombres réels toute fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans ce cas, on note pour tout entier $n : u_n = u(n)$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notation : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.

Notation : On prendra grand soin de ne pas confondre :

- une suite, qui est une application, et qui sera notée $u, (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou éventuellement (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguïté ;
- son terme général, qui est un réel, et qui sera noté u_n ou directement donné par une expression en n .

Ainsi, des énoncés comme « u_n est croissante » ou « u_n converge » sont à proscrire ! C'est « u est croissante » ou « u converge ».

2) Suites réelles et ordre

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que u est minorée, majorée ou bornée si $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'est !

On dit que u est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

On dit que u est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

On dit que u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

3) Définition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si u est minorée, la borne inférieure de u est : $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Si u est majorée, la borne supérieure de u est : $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors u_n est minorée par 0, $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = 0$

et $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \frac{1}{3}$.

4) Suites extraites

Soit u et v deux suites. On dit que v est une suite extraite de u s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Remarque : La fonction φ vérifie nécessairement : $\varphi(n) \geq n$.

Démonstration : Évidente par récurrence !

Mais alors, la suite (u_{2n+1}) est-elle une suite extraite de (u_{2n}) ?

Déjà, intuitivement... non, il serait étrange que les termes impairs soient contenus dans les termes pairs... pourtant : $\varphi : 2n \rightarrow 2n + 1$ est croissante ?

Oui, et si on pose $w_n = u_{2n}$, alors $u_{2n+1} = w_{\varphi(n)} = u_{2\varphi(n)}$, donc $2n + 1 = 2\varphi(n)$,

soit $\varphi(n) = n + \frac{1}{2}$ n'est plus à valeurs dans \mathbb{N} .

Plus généralement, si (u_n) possède une suite extraite définie à l'aide de φ ,

et si $(u_{\varphi(n)})$ possède elle-même une suite extraite définie à l'aide de ψ ,

alors cette dernière est une suite extraite de (u_n) définie avec $\varphi \circ \psi$.

5) Limite

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l un réel.

- on dit que u converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon)$;
- on dit que u diverge vers $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies A \leq u_n)$;
- on dit que u diverge vers $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies u_n \leq A)$.

6) Théorème dit de « l'unicité de la limite »

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (l; l') \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l'$, alors $l = l'$.

Démonstration :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_1 \implies |u_n - l'| \leq \varepsilon)$

En particulier pour $\varepsilon/2$, et $n \geq \max(n_0; n_1)$, $|u_n - l| \leq \varepsilon/2$ et $|u_n - l'| \leq \varepsilon/2$.

Or $|l - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq \varepsilon$; en faisant tendre ε vers 0, $l = l'$.

7) Limites et inégalités

Soient u et v deux suites de réels convergentes.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ alors : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies u_n < v_n)$.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Attention : Lors d'un « passage à la limite », une inégalité même stricte conduit à une inégalité large.

8) Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration : En appelant l la limite, on a : u converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon)$.

Pour $\varepsilon = 1$, on a : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq 1)$, donc pour $n \geq n_0, u_n \leq 1 + l$.

Il suffit alors de prendre $\max(u_0, \dots, u_{n_0}; 1 + l)$ comme majorant (et un raisonnement analogue pour le minorant).

Remarque : La réciproque est fautive, penser par exemple à $u_n = (-1)^n$.

9) Théorèmes**a) Suites extraites d'une suite convergente**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l un réel. Si u converge vers l , alors toute suite extraite de u converge vers l .

Démonstration : En appelant l la limite, on a : u converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon)$, et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ avec $\varphi(n) > n$.

Donc : $\varphi(n) > n \geq n_0 \implies |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$ et v_n converge vers l .

b) Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un intervalle I , a un point de I ou une extrémité de I .

$L \in \overline{\mathbb{R}}, u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$.

Démonstration : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies |u_n - a| \leq \varepsilon)$.

Et : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| < \eta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon$.

D'où la conclusion !

c) Opérations sur les limites

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (L; L') \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soit α un réel non nul.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$.

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |L|$.

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = LL'$.

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = L + L'$.

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha u_n = \alpha L$.

Alors, si $L \neq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{L}$.

Alors, si $L = 0^+, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Il peut être judicieux de se souvenir des tableaux de limites vus en terminale :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Indéterminée

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n =$	$\ell \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	Indéterminée

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	Indéterminée	Indéterminée

Exemple : Montrer que la suite $u_n = n^2 - n \cos(n)$ diverge.

d) Comparaison

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que u et w convergent vers L et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Alors v est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$.

Démonstration :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_0 \implies |u_n - L| \leq \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, (\forall n \geq n_1 \implies |w_n - L| \leq \varepsilon)$$

$$\text{Ainsi, pour } n \geq \max(n_0, n_1), |v_n - L| \leq \max(|u_n - L|, |w_n - L|) \leq \varepsilon.$$

e) Théorème

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq |u_n|$

Alors, v est convergente et sa limite est 0.

Démonstration : On a $-u_n \leq v_n \leq u_n$ et on applique le théorème d'encadrement.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$

Alors, v est divergente et sa limite est $+\infty$.

f) Théorèmes de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone, alors u est convergente si et seulement si u est bornée.

Si u est croissante et majorée, alors u est convergente.

Si u est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Si u est décroissante et minorée, alors u est convergente.

Si u est décroissante et non minorée, alors u diverge vers $-\infty$.

Démonstration : Montrons que si u est croissante et majorée, alors u est convergente.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

De plus : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Soit $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$: c'est une partie non vide de \mathbb{R} , et majorée, donc elle admet une borne supérieure notée L .

Et : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, L - \varepsilon < u_N \leq L$.

Comme u_n est croissante, $\forall n \geq N, L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L$, donc u_n converge vers L .

10) Suites adjacentes : <https://youtu.be/eg2ng0mFQXY>

a) Définition

Deux suites u et v sont dites adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante, et si $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

b) Théorème

Si u et v sont deux suites adjacentes, alors u et v sont convergentes et de même limite L .

Et si u est croissante (et donc v décroissante) : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, u_n \leq L \leq v_p$.

Démonstration : Si u est croissante et v décroissante, alors nécessairement $u_n \leq v_n$.

Et : $u_n \leq v_n \leq v_0$ donc u_n converge.

De même, v_n converge.

Comme $(u_n - v_n)$ converge vers 0, u_n et v_n ont même limite.

Exemple : On souhaite montrer que la suite u définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est convergente.

On introduit à cette fin la suite v définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

Montrer que u et v sont adjacentes et conclure !

c) Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge.

Démonstration : Construisons par dichotomie deux suites adjacentes encadrant une infinité de termes de u .

Comme u est bornée, il existe $a_0 \leq b_0$ tels que tous les termes de u appartiennent à $[a_0, b_0]$.

On construit alors par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) : à chaque étape, on coupe $[a_n, b_n]$ en son milieu $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, et on choisit pour $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ celle des deux moitiés $[a_n, c_n]$ ou $[c_n, b_n]$ qui contient une infinité de termes de u (l'une au moins des deux en contient une infinité, car leur réunion en contient une infinité).

On a alors (a_n) croissante, (b_n) décroissante, et $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \rightarrow 0$: les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes (cf. théorème précédent), et convergent vers une même limite L .

Construisons enfin une suite extraite de u convergeant vers L : on choisit $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(0)} \in [a_0, b_0]$, puis, $\varphi(n)$ étant choisi, comme $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de u , on peut choisir $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

La fonction φ est alors strictement croissante, et pour tout $n, a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$: par encadrement, $u_{\varphi(n)} \rightarrow L$.

11) Suites complexes**a) Définition**

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

b) Proposition

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. u est bornée si et seulement si $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ sont bornées.

c) Proposition

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell).$$

III. Suites récurrentes**1) Théorème-Définition**

Soit f une fonction de I dans I (I désigne un intervalle) et a un réel de I .

Il existe une unique suite u telle que :

Pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = a$.

Remarque n°1 : la fonction f est appelée fonction itératrice.

Remarque n°2 :

Si $f : x \rightarrow x + c$ alors u est arithmétique de raison c .

Si $f : x \rightarrow ax$ alors u est géométrique de raison a .

Si $f : x \rightarrow ax + c$ alors u est arithmético-géométrique.

2) Théorème

Pour une suite telle que définie au 1), si l'itératrice est monotone alors :

Si f est croissante, alors u est monotone.

Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

Démonstration : En exercice !

3) Théorème

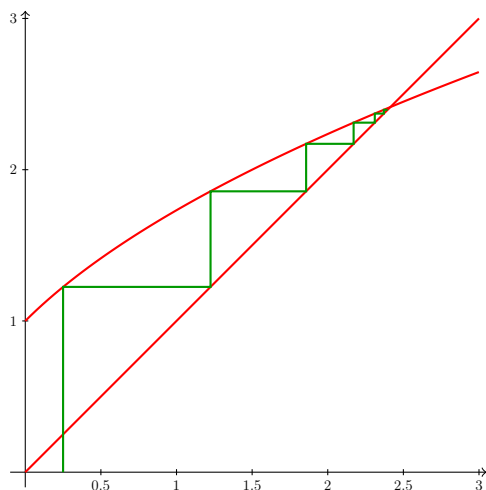
Pour une suite telle que définie au 1), si l'itératrice est continue alors :

Si u converge vers L dans I , alors L est solution de l'équation $f(x) = x$.

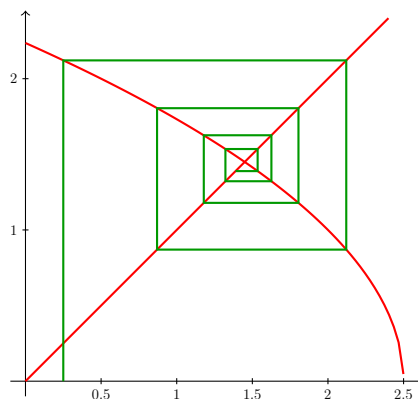
Remarque : Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont appelées points fixes de f .

Démonstration : u_{n+1} et u_n ont la même limite, donc L vérifie $f(x) = x$.

Illustrons la méthode par deux exemples de suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 1/4$, représentés à l'aide d'un diagramme en « escargot » (la courbe de f en rouge, la droite d'équation $y = x$ en rouge également, et la construction itérative des termes de la suite en vert) :



$$u_0 = 1/4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n}$$



$$u_0 = 1/4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{5 - 2u_n}$$

4) Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2

a) Définition

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est une suite, réelle ou complexe, vérifiant une relation de récurrence du type : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (a et b sont deux constantes et $b \neq 0$).

Remarque : L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est appelée équation caractéristique de la relation récurrente.

b) Théorème (cas complexe)

Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors les suites complexes solutions sont de la forme : $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ avec α_1 et α_2 deux complexes.

Sinon, si l'équation caractéristique possède une racine double r , alors les suites complexes solutions sont de la forme : $\alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ avec α_1 et α_2 deux complexes.

Démonstration : Clairement les suites proposées sont solutions. Mais y en a-t-il d'autres ?

Soit v_n une autre solution.

Montrons que si $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$ alors $u_n = v_n$.

En effet, par récurrence, soit P_n : « $u_n = v_n$ ».

P_0 et P_1 sont vraies.

Si P_n (et P_{n-1}) est vraie, alors $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} = av_n + bv_{n-1} = v_{n+1}$.

c) Théorème (cas réel)

Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors les suites réelles solutions sont de la forme : $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Si l'équation caractéristique possède une racine double r , alors les suites réelles solutions sont de la forme : $\alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Si l'équation caractéristique ne possède aucune solution réelle, alors, en notant l'une des deux solutions complexes sous la forme $r = \rho e^{i\theta}$, les solutions réelles sont de la forme : $\rho^n (\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta))$ avec α_1 et α_2 deux réels.

Exemple : Soit la suite de Fibonacci définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, donner l'expression de F_n en fonction de n .

5) Suites arithmético-géométriques

Soit $u_{n+1} = au_n + b$. On cherche L , point fixe de $f(x) = ax + b$, on pose alors $v_n = u_n - L$; on démontre que v_n est géométrique de raison a , on en déduit l'expression de v_n puis de u_n .

IV. Exercices

Exercice n°1

- 1) Montrer que si une suite est bornée à partir d'un certain rang, alors elle est bornée.
- 2) Est-ce que le produit de deux suites minorées est encore minoré ?
- 3) Soit une suite (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, quel lien peut-on faire entre les points fixes de l'itératrice de u_n et ceux de u_{2n} ?

Exercice n°2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ; on suppose que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

- 1) Justifier le fait que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ soient des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) a) À l'aide de la suite $(u_{4n^2})_{n \in \mathbb{N}}$, démontrer que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite.
b) Démontrer de même que $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite.
- 3) Que peut-on conclure pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice n°3

Étudier les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n} \quad v_n = \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}} \quad w_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0 \text{ et } b > a) \quad t_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$$

Exercice n°4

Soit (a_n) et (b_n) deux suites qui convergent vers L et L' .

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_n = \min(a_n; b_n)$ et $v_n = \max(a_n; b_n)$.

Étudier la convergence de (u_n) et (v_n) .

Exercice n°5

Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Ces suites sont-elles adjacentes ?

Exercice n°6

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

Et $u_0 > 0$, $v_0 > 0$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel non nul : $u_n \leq v_n$.
- 2) Montrer que les deux suites u et v convergent vers une même limite.

Exercice n°7

Étudier la suite u définie par $u_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Exercice n°8 (concours)

Soit $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. L'objectif de l'exercice est d'étudier la convergence de cette suite.

- 1) Soit $n \geq 2$, on pose $z_n = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} z_n^k$. Justifier.
- 2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$: $\frac{2}{1 - z_n} = 1 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
- 3) En déduire que, pour tout $n \geq 2$: $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
- 4) La suite (S_n) converge-t-elle ? Justifier.
- 5) Soit $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) converge. Vous déterminerez sa limite.

Exercice n°9

Étant donné un réel θ , pour tout entier naturel, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et en déterminer la limite.

Exercice n°10

Soit la fonction $f : I \rightarrow I$, décroissante, et $a \in I$; on considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens de monotonie opposé.

Exercice n°11

- 1) Soit (z_n) une suite de complexes telle que pour tout n dans \mathbb{N} :

$$z_{n+1} = \frac{1}{5} (3z_n - 2\bar{z}_n + 1).$$

On note $x_n = \operatorname{Re}(z_n)$ et $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{1}{5}$ et trouver une relation de récurrence entre y_{n+1} et y_n .

En déduire une expression de x_n et y_n ainsi que la limite de la suite (z_n) .

- 2) Soit u_n la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et pour tout n dans \mathbb{N} , $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$. Déterminer une expression de u_n en fonction de n .

Exercice n°12

À l'aide d'une étude de fonction, étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Exercice n°13 <https://youtu.be/1G21h6xsC1g>

Même énoncé que l'exercice n°12 avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Exercice n°14

Même énoncé que l'exercice n°12 avec $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Exercice n°15

Donner une expression en fonction de n , de la suite u_n définie par : $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$ et $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.

Même question, avec v_n vérifiant : $v_{n+2} = v_{n+1} - v_n$ et $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ (uniquement les expressions réelles).

Exercice n°16

- 1) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$ ne s'annule pas sur $[0, \sqrt{2}]$.
- 2) Montrer que $\sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} = x \iff (x - 1)(x^3 + x^2 - 3x - 2) = 0$ et conclure quant aux solutions.
- 3) Étudier la nature de la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

Exercice n°17

Pour tout entier n , on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, montrer que la suite converge.

Exercice n°18

Pour tout entier n , on définit f_n par $f_n(x) = x^3 + nx - 2$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , f_n s'annule en un unique point qu'on appelle x_n .
- 2) Montrer que la suite (x_n) ainsi définie converge et déterminer sa limite.

Exercice n°19

Soit la suite u définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, montrer que les suites v et w définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont adjacentes, et en déduire que u converge.

Exercice n°20

Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier non nul, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Déterminer, en étudiant $v_n = u_n - 1$, l'expression de u_n .

Exercice n°21 (concours)

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $x \rightarrow 1 + \frac{2}{x}$, et on définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

- 1) Déterminer les variations de f sur $[1 ; 3]$.
- 2) Montrer que $[1 ; 3]$ est stable par f (c'est-à-dire que $f([1 ; 3]) \subset [1 ; 3]$). Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
- 3) Déterminer les monotonies de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
- 4) Démontrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
- 5) Déterminer les limites respectives de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
- 6) Que peut-on conclure pour (u_n) ?

Exercice n°22 (concours)

On dit qu'une suite (u_n) est une suite de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p > q > N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon).$$

- 1) Écrire la négation de la définition d'une suite de Cauchy (et en déduire la définition d'une suite qui n'est pas de Cauchy).
- 2) Montrer que la suite $(\ln(n))_{n \geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
- 3) Montrer que la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy.
- 4) Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Exercice n°23 (concours)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer $u_n \leq v_n$.
- 3) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 4) Démontrer que ces deux suites convergent vers la même limite.
- 5) Étudier la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice n°24

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$.

- 1) En cas de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, préciser quelles sont les limites possibles.
- 2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + x}{2}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$, dresser le tableau de variations de f et le signe de la fonction $x \rightarrow f(x) - x$ sur $[0, +\infty[$.
- 3) Montrer que pour tout entier naturel, $u_n \geq 1$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
- 4) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- 5) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$. Montrer que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.
En déduire le sens de variation de v_n .
- 6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n + \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$.
- 7) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v_n \leq v_0 + \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
- 8) Démontrer que v_n est bornée et démontrer que la suite v_n converge.

Exercice n°25 (concours)

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}.$$

Le but de l'exercice est de prouver que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et de déterminer la valeur de la limite de cette suite.

- 1) Prouver que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.
- 2) Prouver que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
- 3) Justifier le fait que, pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$.
- 4) Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$.
- 5) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.

Exercice n°26

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}}{n}$.

- 1) Montrer que si (u_n) converge vers 0, il en est de même pour la suite (v_n) .
- 2) En déduire que si (u_n) converge vers L , il en est de même pour la suite (v_n) .
- 3) À l'aide de la suite $u_n = (-1)^n$, montrer que la réciproque est fautive.