

Chapitre : Endomorphismes d'un espace euclidien

M. Calciano

Dans tout le chapitre, E désigne un espace euclidien (donc un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie).

On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

I. Isométries vectorielles

1) Définition

Soit u un endomorphisme de E , on dit que u est une isométrie vectorielle si u conserve la norme.

Ainsi : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

2) Remarque

Toute isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E .

Démonstration : Si $u(x) = 0$ alors $\|u(x)\| = 0$ donc $\|x\| = 0$ donc $x = 0$ et u est injective, donc bijective car E est de dimension finie !

3) Vocabulaire

Une isométrie vectorielle est également appelée **automorphisme orthogonal**.

On appelle ainsi groupe orthogonal $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles.

4) Proposition

Un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire.

Ainsi $u \in O(E) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

Démonstration : Si $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$, alors pour $y = x : (u(x)|u(x)) = (x|x)$.

Soit $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ et $\|u(x)\| = \|x\|$ donc $u \in O(E)$.

Réciproquement :

Si $u \in O(E)$, par les identités de polarisation : $(u(x)|u(y)) = \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2)$.

Donc $(u(x)|u(y)) = (x|y)$ (par linéarité de u).

Remarque : le terme « isométrie » insiste sur la conservation de la norme, tandis que celui « d'automorphisme orthogonal » insiste sur la conservation du produit scalaire (en particulier l'orthogonalité).

5) Proposition

Soit B une base orthonormée de E .

Un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image de B par u est une base orthonormée.

Démonstration : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E .

Si $u \in O(E)$, pour tout i, j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $= 1$ sinon, donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une b.o.n. de E .

Réciproquement :

On suppose que l'image de B par u est une b.o.n.

On a $\|u(x)\|^2 = \|u(\sum_{i=1}^n x_i e_i)\|^2 = \|\sum_{i=1}^n x_i u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2$.

D'où $\|u(x)\| = \|x\|$ donc $u \in O(E)$.

6) Proposition

L'ensemble $O(E)$ est stable par composition et par passage à l'inverse.

Démonstration : Soient $(u, v) \in O(E)^2$.

Alors $\forall x \in E, \|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|$.

Alors $\forall x \in E, \|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$.

7) Proposition

Soit $u \in O(E)$, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est également stable par u .

Démonstration : Soit $y \in F^\perp$, est-ce que $u(y) \in F^\perp$? En d'autres termes, est-ce que $\forall x \in F, (x|u(y)) = 0$?

Comme $u \in O(E)$, alors $u^{-1} \in O(E)$, $(x|u(y)) = (u^{-1}(x)|y)$ or $u^{-1}(x) \in F$ et $y \in F^\perp$ donc $(x|u(y)) = (u^{-1}(x)|y) = 0$.

8) Symétries orthogonales

a) Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F et parallèlement à F^\perp .

Cette symétrie « s » est caractérisée par : $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$, et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = F^\perp$.

b) Proposition

Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Démonstration : Pour tout $x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F \times F^\perp$ tel que : $x = x_1 + x_2$.

On a $s(x) = x_1 - x_2$.

Et : $\|s(x)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$.

Remarque : ainsi, une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal, tandis qu'une projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal (sauf si c'est l'identité!).

c) Terminologie

On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E .

II. Formes quadratiques

1) Rappels

On appelle **forme bilinéaire** sur E toute application φ de $E \times E$ dans \mathbb{R} telle que :

- pour tout y de E , l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ soit linéaire ;
- pour tout x de E , l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ soit linéaire.

On appelle forme **bilinéaire symétrique** sur E toute forme bilinéaire φ telle que $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Étant donné une forme bilinéaire φ sur E , on dit que :

la forme φ est positive si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$;

la forme φ est définie si $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

2) Définition

Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} , et Q une fonction de E dans \mathbb{K} .

On dit que Q est une forme quadratique sur E s'il existe $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$, une forme bilinéaire symétrique, telle que pour chaque x de E , on ait $Q(x) = f(x, x)$.

3) Polarisation

On dispose de l'identité de polarisation suivante : $f(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$. Ainsi, à une forme quadratique Q correspond une unique forme bilinéaire symétrique f telle que $Q(x) = f(x, x)$.

f s'appelle la forme polaire de Q .

Exemple :

Soit $Q(x, y, z) = x^2 - 3yz$, montrer que Q est une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 (on précisera la forme polaire correspondante...).

Soit $u(x, y, z)$ et $v(x', y', z')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

On a donc $Q(u) = x^2 - 3yz$.

$Q(u+v) = Q(x+x', y+y', z+z') = (x+x')^2 - 3(y+y')(z+z') = x^2 + x'^2 + 2xx' - 3(yz + y'z + yz' + y'z')$.

$Q(u-v) = Q(x-x', y-y', z-z') = (x-x')^2 - 3(y-y')(z-z') = x^2 + x'^2 - 2xx' - 3(yz - y'z - yz' + y'z')$.

On pose $f(u, v) = \frac{1}{4}(Q(u+v) - Q(u-v)) = \frac{1}{4}(4xx' - 6y'z - 6yz') = xx' - \frac{3}{2}y'z - \frac{3}{2}yz'$.

Il reste à vérifier que $f(u, v) = xx' - \frac{3}{2}y'z - \frac{3}{2}yz'$ est bilinéaire et symétrique...

On peut remarquer le « dédoublement » entre $xx' - 3 \cdot \frac{y'z + yz'}{2}$ et $x^2 - 3yz$.

4) Vocabulaire

Une forme quadratique Q est dite positive (resp. définie) si sa forme polaire est positive (resp. définie).

5) Matrice d'une forme quadratique

Soit $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et B une base de E .

Alors $A = \text{mat}_B(Q)$ si et seulement si A est symétrique et pour tout $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ de E , $Q(x) = {}^t X A X$.

III. Matrices orthogonales

1) Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice orthogonale si ${}^t A A = I_n$.

Notation : on note $O_n(\mathbb{R})$ leur ensemble.

2) Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note C_1, \dots, C_n ses colonnes et L_1, \dots, L_n ses lignes.

La matrice A est orthogonale si et seulement si elle vérifie l'une des 3 propriétés suivantes (équivalentes) :

- (i) $A \in GL_n(\mathbb{R})$, et ${}^t A = A^{-1}$;
- (ii) la famille (C_1, \dots, C_n) est une base orthonormée de \mathbb{R}^n ;
- (iii) la famille (L_1, \dots, L_n) est une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

Démonstration : Le (i) repose sur la définition, nous démontrons le (ii) (le (iii) s'obtient de façon équivalente).

$A \in GL_n(\mathbb{R})$, et ${}^t A = A^{-1}$; ainsi ${}^t A A = I_n$, donc $({}^t A A)_{ij} = \delta_{ij}$, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \delta_{ij}$ soit $(C_i | C_j) = \delta_{ij}$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, préciser quelles sont les matrices orthogonales.

Réponse : C .

3) Proposition

Soit B une base orthonormée de E .

Un endomorphisme u de E est une isométrie vectorielle si et seulement si la matrice de u dans B est orthogonale.

Démonstration : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$, u est une isométrie vectorielle ssi $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une b.o.n.

Or $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(u(e_i)|u(e_j)) = {}^t C_i C_j = \delta_{ij}$.

Remarque : le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut donc ± 1 (en effet celui d'une matrice orthogonale vaut ± 1 : en effet ${}^t A A = I_n$, donc $\det({}^t A A) = 1$ et $\det({}^t A) = \det(A)$...).

4) Proposition

Soit B une base orthonormée de E . Soit B' une base de E .

Alors B' est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{B \rightarrow B'}$ est orthogonale.

Démonstration : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$, $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$, et $A : P_{B \rightarrow B'}$.

Soit (C_1, \dots, C_n) les colonnes de A .

Alors A est orthogonale ssi ${}^t A = A^{-1}$ ssi $(C_i|C_j) = \delta_{ij}$.

5) Définition

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

A est dite directe ou positive si $\det(A) = +1$, on note $SO_n(\mathbb{R})$ leur ensemble.

A est dite indirecte ou négative si $\det(A) = -1$.

Exemple : $I_n \in SO_n(\mathbb{R})$.

6) Terminologie

L'ensemble des isométries vectorielles directes de E est appelé groupe spécial orthogonal de E , et est noté $SO(E)$.

7) Proposition

Si u et v sont dans $SO(E)$ alors $v \circ u \circ v^{-1}$ est dans $SO(E)$.

Démonstration : On sait déjà que $v \circ u \circ v^{-1} \in O(E)$, et $\det(v \circ u \circ v^{-1}) = \det(u) = +1$.

8) Espace vectoriel euclidien orienté

Soit B et B' deux bases orthonormées de E .

On dit que B et B' sont de même sens si la matrice de passage $P_{B \rightarrow B'}$ est dans $SO_n(\mathbb{R})$ avec $n = \dim(E)$.

9) Orientation d'un espace

On dit que l'on oriente l'espace E lorsque l'on choisit une base orthonormée B_0 et qu'on la déclare directe.

Une base orthonormée sera dite directe si elle est de même sens que B_0 .

10) Corollaire

Soit B et B' deux bases orthonormées directes de E .

On a alors $\det_B = \det_{B'}$.

En d'autres termes : $\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n$, $\det_B(u_1, \dots, u_n) = \det_{B'}(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration : Comme B et B' sont deux bases orthonormées directes de E alors $P_{B \rightarrow B'}$ est dans $SO_n(\mathbb{R})$, donc $\det \text{Mat}_B(B') = +1$.

Or : $\det_{B'} = \det_{B'}(B) \times \det_B$ donc $\det_B = \det_{B'}$.

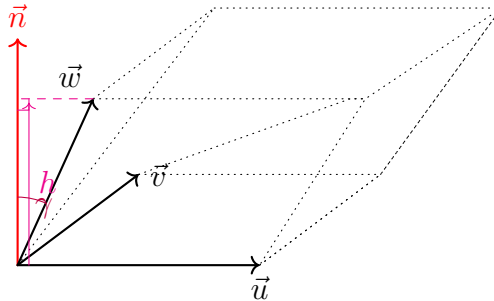


Figure : interprétation géométrique du produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ comme volume du parallélépipède (base (\vec{u}, \vec{v}) , hauteur $h = \|\vec{w}\| \cos \gamma$ selon \vec{n}).

Remarque : en particulier, si u, v, w sont 3 vecteurs de E , alors $\det_B(u, v, w)$ est indépendant de la base orthonormée directe B . Ce nombre est appelé produit mixte des 3 vecteurs et se note $[u, v, w]$.

11) Description de $SO(E)$ avec E de dimension 2

Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

– appartient à $SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est de la forme : $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$;

– appartient à $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est de la forme : $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Terminologie : on appelle matrice de rotation d'angle θ la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$; cette matrice sera notée $R(\theta)$ dans la suite.

Démonstration : Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$, alors la famille $(C_1; C_2)$ des colonnes de M est une b.o.n. de \mathbb{R}^2 .

C_1 est de norme 1, donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$, tel que $C_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$.

Comme C_2 est orthogonale à C_1 et de norme 1 alors $C_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$.

Ainsi M est soit $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ de déterminant -1 ,

soit $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ de déterminant 1.

12) Proposition

Pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1)$.

Remarques :

On constate donc que deux éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

Démonstration : Il s'agit d'utiliser les formules de duplication du cosinus et du sinus.

13) Proposition

Soit B une base orthonormée directe de E , et u un endomorphisme de E .

On a $u \in SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $M_B(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Remarque : le réel θ , unique à 2π près, ne dépend pas de la base orthonormée directe B .

Démonstration : Conséquence du 11).

14) Angle orienté

a) Proposition

Soit x et y deux vecteurs unitaires de E , il existe une unique rotation $r \in SO(E)$ telle que $r(x) = y$.

Démonstration : Pour l'existence :

Comme x est unitaire, on peut compléter afin d'obtenir une b.o.n. de E .

De même pour y .

Ainsi : (x, e_1) et (y, e_2) sont deux b.o.n. de E .

L'unique endomorphisme qui envoie x sur y est donc dans $SO(E)$.

Pour l'unicité :

Soit r de $SO(E)$ tel que $r(x) = y$.

Soit θ l'angle de la rotation.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = ax + be_2$.

Comme la base est orthonormée, $r = R(\theta)$, donc $\cos \theta = a$ et $\sin \theta = b$, ce qui détermine θ à 2π près.

b) Définition

Soit x et y deux vecteurs non nuls du plan E .

On appelle mesure orientée des vecteurs x et y , et on note (x, y) toute mesure de l'angle de la rotation r telle que : $r \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{y}{\|y\|}$.

c) Relation de Chasles

Soit $(x, y, z) \in E^3$, trois vecteurs non nuls, alors : $(x, z) = (x, y) + (y, z) [2\pi]$.

Démonstration : Soit u la rotation qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$ et v la rotation qui envoie $\frac{y}{\|y\|}$ sur $\frac{z}{\|z\|}$.

Alors $u \circ v$ est une rotation qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{z}{\|z\|}$.

Or si $u = R(\theta)$ et $v = R(\theta')$ alors $u \circ v = R(\theta + \theta')$.

 15) Description de $O(E) \setminus SO(E)$

Soit $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E .

Soit u un endomorphisme de E .

On a : $u \in O(E) \setminus SO(E)$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $M_B(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme u est alors la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\text{Vect}(v_\theta)$ avec $v_\theta = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e_1 + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e_2$.

Démonstration : $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique : $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.

L'endomorphisme u est diagonalisable.

$$E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E).$$

On peut donc affirmer que u est une symétrie.

Après calculs, les vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et -1 sont :

$$V_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \text{ et } V_{-1} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Soit : $v_\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$ et $w_\theta = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$.

Comme les vecteurs sont orthogonaux, on en déduit que u est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\text{vect}(v_\theta)$.

16) Classification des isométries en dimension 3

E désigne à présent un espace vectoriel orienté de dimension 3.

Soit u une isométrie de E , il y a donc deux possibilités : $\det(u) = \pm 1$.

a) Si $\det(u) = 1$

Géométriquement u est une rotation, on cherche alors l'ensemble des vecteurs invariants par u , c'est-à-dire le sous-espace propre $E_1(u)$ associé à la valeur propre 1 ; il y a alors deux possibilités :

– soit $\dim(E_1(u)) = 3$ alors u est l'identité de E ;

– soit $\dim(E_1(u)) = 1$ alors E_1 correspond à une droite D appelée axe de rotation.

Le plan $P = D^\perp$ est stable par u .

En considérant un vecteur unitaire e_1 de D et une b.o.n. (e_2, e_3) de P telle que (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormée directe de E , alors la matrice de u dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La conservation de la trace, donnant $1 + 2 \cos \theta$, permet de déterminer $\cos \theta$ et donc de déterminer $\pm \theta$.

L'exemple suivant donne la façon de déterminer θ ; il nécessite de savoir calculer le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace. Ce calcul est simple mais n'est plus abordé dans le secondaire.

Lemme (admis) : calcul du produit vectoriel dans l'espace.

Définition : si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de E , il existe un unique vecteur \vec{w} de E tel que : $\forall \vec{x} \in E, [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = (\vec{w}, \vec{x})$.

Ce vecteur \vec{w} est appelé le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} .

Propriétés :

(i) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ;

(ii) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \vec{w}$ avec \vec{w} unitaire, orthogonal à (\vec{u}, \vec{v}) et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un trièdre direct.

Expression analytique :

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') . Alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.

Étude d'un exemple :

Soit l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Reconnaitre géométriquement cet endomorphisme.

* Montrer que $A \in O_3(\mathbb{R})$.

* Montrer que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

* Montrer que $AU = U$ correspond à $\text{vect}(U(1, 1, 1))$.

* Avec la trace, montrer que $\theta = \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

* Montrer que $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ est unitaire et orthogonal à U .

* Montrer que $V \wedge AV = \frac{-1}{2}(1, 1, 1) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ donc $\sin(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

A est la matrice de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b) Si $\det(u) = -1$

Il existe alors une base orthonormale directe (e_1, e_2, e_3) telle que la matrice de u dans cette base

est de la forme :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, alors u est la symétrie orthogonale par rapport au plan P de base (e_2, e_3) .

Si $\theta \equiv \pi [2\pi]$, alors $u = -\text{Id}_E$.

Sinon, on cherche $E_{-1}(u)$, espace propre associé à la valeur propre -1 , soit D la droite correspondante.

La conservation de la trace donne $-1 + 2 \cos \theta$, ce qui permet de déterminer $\pm \theta$.

Et u est la composée commutative de la rotation d'axe D et d'angle θ avec la réflexion par rapport à P orthogonal à D .

On parle d'antirotation.

Remarque : on peut aussi étudier la matrice $-A$ et se ramener à l'étude d'une rotation.

En résumé :

Dans le plan :

$\dim(E_1(u))$	Nature de u	Type d'isométrie
0	Rotation d'axe $E_1(u)$	+
1	Réflexion d'axe $E_1(u)$	-
2	Id_E	+

Dans l'espace :

$\dim(E_1(u))$	Nature de u	Type d'isométrie
0	Antirotation $E_{-1}(u)$	-
1	Rotation d'axe $E_1(u)$	+
2	Réflexion de plan $E_1(u)$	-
3	Id_E	+

Étude d'un exemple : montrer que la matrice $A = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ est, dans une base orthonormée directe, celle d'une antirotation de l'espace dont on déterminera l'axe (à l'aide de E_{-1}) et l'angle (à l'aide de $\text{tr}(A) = -1 + 2 \cos \theta$).

Sinon, on obtient que $-A$ est une rotation d'axe $\text{vect}(1, 1, 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

A est alors la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'une symétrie centrale.

Sinon, on peut aussi appréhender A comme la composée d'une rotation d'axe $\text{vect}(1, 1, 0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ avec une réflexion dont le plan est orthogonal à l'axe !

IV. Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques

1) Définition

Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint, ou symétrique, s'il vérifie : $\forall(x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$.

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

2) Proposition

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$.

3) Proposition

Soit p une projection de E .

Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.

Démonstration : Soit F et G les deux sous-espaces supplémentaires dans E tels que p soit la projection sur F parallèlement à G .

Ainsi : $\forall x \in E, \exists(x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$ et $p(x) = x_1$.

Supposons que p soit une projection orthogonale.

Soit $(x, y) \in E^2, \exists(x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$ et $\exists(y_1, y_2) \in F \times G, y = y_1 + y_2$.

$(p(x)|y) = (x_1|y_1)$ et $(x|p(y)) = (x_1|y_1)$.

Donc $(p(x)|y) = (x|p(y))$ et p est autoadjoint.

Réciproquement :

Si p est autoadjoint, $\forall(x, y) \in F \times G, (p(x)|y) = (x|p(y))$ donne $(x|y) = 0$ donc x et y orthogonaux.

4) Lien avec les matrices

Soit B une base orthonormée de E .

Un endomorphisme u de E est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans la base B est symétrique.

L'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n est noté $S_n(\mathbb{R})$.

On a : $\dim S(E) = \frac{n(n+1)}{2}$ avec $n = \dim(E)$.

Démonstration : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $A = (a_{i,j})$ matrice de u dans B .

Comme B est orthonormée, $a_{i,j} = (u(e_i)|e_j) = (u(e_j)|e_i) = a_{j,i}$.

Réciproquement :

Si A symétrique, si $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$.

Comme A est symétrique, $(u(e_i)|e_j) = (u(e_j)|e_i)$, d'où $(u(x)|y) = (x|u(y))$.

Et u est symétrique.

Remarque : la matrice dans une base orthonormée de E d'une symétrie orthogonale est symétrique.

5) Réduction des endomorphismes autoadjoints

a) Proposition

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E .

Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors F^\perp est également stable par u .

Démonstration : Si $x \in F^\perp$, soit $y \in F$, $(u(x)|y) = (x|u(y)) = 0 \dots$

b) Proposition

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

c) Théorème dit théorème spectral (théorème admis)

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Remarque : donc, en clair, si une matrice est symétrique alors elle est diagonalisable ?

Oui et non, cela dépend de quoi on parle...

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors $\chi_A(X) = X^2$ donc le spectre se résume à $\{0\}$; ainsi, si A était diagonalisable alors A serait la matrice nulle ! Donc A n'est pas diagonalisable, tout en étant symétrique.

Pourtant, si la matrice est symétrique alors elle doit représenter un endomorphisme autoadjoint.

Où est l'erreur ?

En fait, une matrice symétrique représente un autoadjoint lorsqu'on travaille sur \mathbb{R} et non sur \mathbb{C} . Le théorème spectral possède une transcription complexe, mais avec une définition du produit scalaire différente : il ne s'agit plus d'espace euclidien mais d'espace hermitien, et la symétrie est remplacée par la transconjugaison (la matrice doit être égale au conjugué de la transposée).

d) Corollaire

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$.

6) Endomorphismes autoadjoints (définis) positifs

a) Définition

Soit $u \in S(E)$.

On dit que u est autoadjoint positif si $\forall x \in E$, $(x|u(x)) \geq 0$.

On dit que u est autoadjoint défini positif si $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $(x|u(x)) > 0$, on note $S^{++}(E)$ leur ensemble.

b) Proposition

Soit $u \in S(E)$.

On a : $u \in S^+(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$.

On a : $u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Démonstration : On calcule $(x|u(x))$ en décomposant x dans une b.o.n. de vecteurs propres.

c) Définition

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

A est symétrique positive si : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(x|Ax) \geq 0$, on note $S_n^+(\mathbb{R})$ leur ensemble.

A est symétrique définie positive si : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(x|Ax) > 0$, on note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ leur ensemble.

d) Proposition

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

On a : $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.

On a : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Démonstration : En exercice !

V. Exercices

Exercice n°0

Rappel : si l'espace est muni d'un repère orthonormé direct, et si \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, alors les coordonnées de leur produit vectoriel sont $\vec{u} \wedge \vec{v} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Soit : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, déterminer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exercice n°1

- 1) Toute matrice carrée réelle de déterminant 1 est orthogonale ?
- 2) Un endomorphisme orthogonal est bijectif ?
- 3) Un endomorphisme est symétrique ssi sa matrice est symétrique ?

Exercice n°2

Caractériser géométriquement les endomorphismes f et g de \mathbb{R}^3 dont les matrices relativement à la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°3

Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice n°4

Montrer que l'endomorphisme s de \mathbb{R}^3 , canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace que l'on déterminera.

Exercice n°5 (oraux concours)

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- 1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- 2) Soit p la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- 3) Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice n°6 (oraux concours)

Soient E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application linéaire vérifiant

$$\forall x, y \in E, (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0.$$

- a) Calculer $(u + v | u - v)$ pour u, v vecteurs unitaires.
- b) Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|.$$

- c) Conclure qu'il existe $g \in O(E)$ vérifiant $f = \alpha g$.

Exercice n°7 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})^{++}$

- 1) Montrer qu'il existe une unique matrice B de $S_n(\mathbb{R})^{++}$ telle que $B^2 = A$.
- 2) a) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A , montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $p - 1$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.
b) Exprimer ce polynôme P en fonction des λ_i .
- 3) En déduire l'expression de B .

Exercice n°8 (oraux concours)

Soient E un espace euclidien et f une application de E vers E vérifiant

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

- a) Montrer que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|.$$

- b) Établir que

$$\forall x, y \in E, (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

Exercice n°9

Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2$.

- 1) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à q et sa matrice dans la base canonique.
- 2) En déduire le noyau de q .

Exercice n°10

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t AB)$. Vérifier que φ est une application bilinéaire. Quelle est sa matrice dans la « base canonique » de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice n°11

On définit l'application q sur $(\mathbb{R}_2[X])^2$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2$.

- 1) Montrer que q est une forme quadratique et déterminer la forme polaire φ associée ainsi que sa matrice dans la base canonique.
- 2) Déterminer le noyau de q correspondant au noyau de φ .
- 3) Déterminer le cône isotrope de q , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs u tels que $q(u) = 0$.
- 4) La forme quadratique q est-elle définie? Positive ou négative?

Exercice n°12

Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^3 = B^3$, prouver que $A = B$.

Exercice n°13

Soit n un entier non nul, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que ${}^tASA \in S_n(\mathbb{R})$ (on précise que tA désigne la transposée de A).
- 2) Montrer que : $S \in S_n(\mathbb{R})^+ \implies {}^tASA \in S_n(\mathbb{R})^+$.
- 3) Montrer que si $S \in S_n(\mathbb{R})^{++}$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tASA \in S_n(\mathbb{R})^{++}$.

Exercice n°14

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que ${}^tAA \in S_p(\mathbb{R})^+$.
- 2) Montrer que : ${}^tAA \in S_p(\mathbb{R})^{++} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = p$.

Exercice n°15

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E , et q la forme quadratique associée.

Soit B une base de E , et $A = M_B(\varphi)$.

- 1) Si q est positive, montrer que $\det(A) \geq 0$.
- 2) Si q est définie et positive, montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice n°16 : Soit n un entier non nul

- 1) Montrer que $S_n(\mathbb{R})^{++} = S_n(\mathbb{R})^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$.
- 2) En déduire que $S_n(\mathbb{R})^{++}$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})^+$.

Exercice n°17

Soit E un espace euclidien, on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

- 1) Montrer qu'un projecteur orthogonal de E est un endomorphisme symétrique de E .
- 2) Soient p et r deux projecteurs orthogonaux de E , soit λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.
 - a) Montrer que u est élément de $\text{Im}(p)$.
 - b) Montrer que $r(u) - \lambda u$ est élément de $\text{Im}(p)^\perp$.
 - c) Établir l'égalité : $\lambda\|u\|^2 = \|r(u)\|^2$.
 - d) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans $[0, 1]$.

Exercice n°18 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

- 1) Pourquoi A est diagonalisable ?
- 2) Montrer que les valeurs propres de A sont 4 et -5 .
- 3) On note U la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer tUAU .
- 4) On considère : $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x^2 + 4xy + 8yz - 4xz = 18\}$.
Montrer qu'il existe une b.o.n. (u, v, w) de \mathbb{R}^3 , dans laquelle Σ admet une équation : $4X^2 + 4Y^2 - 5Z^2 = 18$.

Exercice n°19

Soit f un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien E vérifiant : $\forall(x, y) \in E^2, (f(x), y) = -(x, f(y))$.

- 1) Montrer que pour tout x de E , x et $f(x)$ sont orthogonaux.
- 2) Montrer que $s = f \circ f$ est un endomorphisme symétrique de E .

Exercice n°20 (oraux de concours)

Soit E un espace euclidien.

- 1) Que peut-on dire des valeurs propres d'une isométrie $f \in O(E)$? *Indication : on pourra considérer la matrice de f dans une base orthonormée et utiliser le résultat sur le déterminant d'un produit.*
- 2) Quelles sont les isométries $f \in O(E)$ qui sont diagonalisables ?

Exercice n°21 (oraux de concours)

Soit A une matrice symétrique. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A .

- 1) Justifier qu'on a $\text{Tr}(A^2) = \langle A, A \rangle$ pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) En déduire qu'on a $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.

Exercice n°22 (oraux de concours)

On se place dans un espace euclidien E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.

Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice n°23 (oraux de concours)

On se place dans un espace euclidien E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.

Montrer que $\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |\lambda|$.

Exercice n°24

- 1) On rappelle que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par $(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$.
On fixe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $f : M \mapsto {}^tAMA$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) On admet que $(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Montrer que $u : P \mapsto 2XP' + (X^2 - 1)P''$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°25

On cherche à démontrer que : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz \geq 0$.

- 1) Déterminer une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ${}^tXAX = q(x, y, z)$.
- 2) Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que : $A = PD{}^tP$.
- 3) On pose $X = PX'$, où $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, calculer $q(x, y, z)$ en fonction de x', y', z' .
- 4) Conclure !

Exercice n°26

Soit E un espace euclidien, u un vecteur non nul de E , on appelle s la réflexion par rapport à $\text{vect}(u)^\perp$.

- 1) Justifier que pour tout x de E , on a : $s(x) = x - 2 \frac{(x, u)}{\|u\|^2} u$.
- 2) On se place à présent dans \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion s par rapport à $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Exercice n°27

Soit (e_1, \dots, e_n) une base quelconque d'un espace euclidien E telle que $\forall x \in E, f(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle e_k$.

- 1) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .
- 2) Montrer que toutes les valeurs propres de f sont strictement positives.

Exercice n°28

Montrer que tout endomorphisme autoadjoint a son noyau et son image supplémentaires orthogonaux.

Exercice n°29 (oral X)

Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n, a\|X\|^2 \leq \langle X, AX \rangle \leq b\|X\|^2$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [a, b], P(x) > 0$. Montrer que $P(A)$ est symétrique définie positive.