

Chapitre : Espaces vectoriels normés

M. Calciano

Dans tout le chapitre, et comme d'habitude, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I. Généralités

1) Définition

On appelle **norme** sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E , une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- Pour tout x de E , $N(x) = 0 \iff x = 0$
- Pour tout λ de \mathbb{K} , et x de E , $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- Pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

2) Définition

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Notations :

- On note (E, N) l'espace vectoriel muni de la norme N .
- On note le plus souvent $\| \cdot \|$ la norme N .

3) Remarque

Si $\| \cdot \|$ désigne une norme, alors $\|0\| = 0$ et $\forall x \in E$, $\| -x \| = \|x\|$.

4) Exemples

- L'application $x \rightarrow |x|$ est une norme sur \mathbb{K} .
- L'application $\mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x, y) \rightarrow \max(|x|; |y|)$ est une norme sur \mathbb{K}^2 , appelée norme infinie et notée $\| \cdot \|_\infty$.
- L'application $\mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x, y) \rightarrow |x| + |y|$ est une norme sur \mathbb{K}^2 , appelée norme 1 et notée $\| \cdot \|_1$.

Démonstration :

Il suffit de vérifier l'axiomatique !

5) Proposition

Soit E un espace préhilbertien réel (c'est-à-dire un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$) alors l'application : $x \rightarrow \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E .

Démonstration :

Il suffit de vérifier l'axiomatique de la norme (l'inégalité triangulaire s'obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

6) Définition

Un vecteur x de E est dit **unitaire** si $\|x\| = 1$.

7) Inégalité triangulaire

Soit x et y deux vecteurs de E , alors, on a :

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Démonstration :

Commençons par montrer : $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Cela revient à montrer que : $\|x\| \leq \|x + y\| + \|y\|$ et $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Or $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$ et $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

De plus, comme x et y ont des rôles symétriques, on a : $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \dots$

8) Distance associée à une norme

On appelle **distance** associée à la norme $\|\cdot\|$ l'application

$$d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (x, y) \rightarrow \|x - y\|$$

9) Inégalité triangulaire en termes de distance

Pour tout (u, v, w) de E^3 , on a $|d(u, v) - d(v, w)| \leq d(u, v) + d(v, w)$.

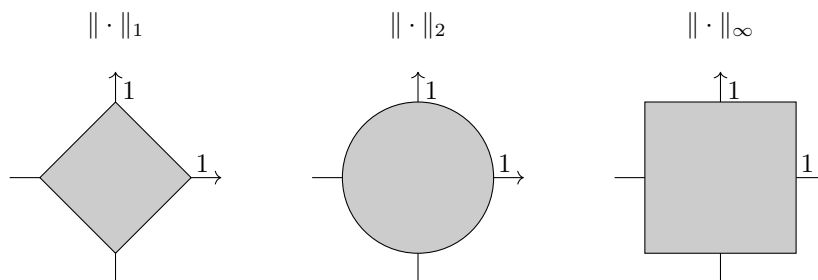
10) Boules ouvertes, boules fermées

On peut définir une **boule fermée** : $B_f(a, r) = \{x \in E, N(a - x) \leq r\}$

On peut définir une **boule ouverte** : $B(a, r) = \{x \in E, N(a - x) < r\}$

On peut définir une **sphère** : $S(a, r) = \{x \in E, N(a - x) = r\}$

Exemple : on peut représenter dans \mathbb{R}^2 les boules centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1 associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.



11) Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** si $\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$.

12) Partie bornée

Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe un réel positif R tel que :

$$\forall a \in A, \quad \|a\| \leq R$$

13) Définition

Soit X un ensemble non vide.

Une application $f : X \rightarrow E$ est dite **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E .

Autrement dit : $\exists R \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq R$.

14) Généralisation

a) Normes sur \mathbb{K}^n

Soit x un vecteur de \mathbb{K}^n , en notant (x_1, \dots, x_n) ses composantes, on a :

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

(et les trois applications sont des normes...)

b) Espace des fonctions bornées

L'application : $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f \rightarrow \|f\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, appelée norme infinie.

Démonstration :

Il suffit de vérifier l'axiomatique en remarquant que $\{|f(x)|, x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , donc elle possède une borne supérieure.

II. Suite d'éléments dans un evn

1) Définition

Soit (a_n) une suite d'éléments de E , et soit L un élément de E .

On dit que la suite (a_n) converge vers L si la suite $(\|a_n - L\|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

2) Propriété dite de l'unicité de la limite

Soit (a_n) une suite d'éléments de E , et soit L_1 et L_2 deux éléments de E .

Si $a_n \rightarrow L_1$ et si $a_n \rightarrow L_2$ alors $L_1 = L_2$.

Démonstration :

$$0 \leq d(L_1; L_2) \leq d(L_1; a_n) + d(L_2; a_n) \rightarrow 0.$$

3) Définition

Soit (a_n) une suite d'éléments de E , alors la suite est dite convergente s'il existe L un élément de E tel que $a_n \rightarrow L$.

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Attention : la convergence d'une suite dépend de la norme choisie, ainsi une suite peut être convergente pour une norme et divergente pour une autre.

4) Opérations sur les limites

Si deux suites a_n et b_n convergent respectivement vers L_1 et L_2 , et si α et β désignent deux scalaires, alors la suite $\alpha a_n + \beta b_n$ converge vers $\alpha L_1 + \beta L_2$.

5) Proposition

Si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L , alors la suite $\|a_n\|$ converge vers $\|L\|$.

Démonstration :

$$\text{On a : } 0 \leq \left| \|a_n\| - \|L\| \right| \leq \|a_n - L\| \rightarrow 0.$$

6) Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration :

Si a_n est convergente alors $\|a_n\|$ est convergente, donc bornée (voir le cours de l'an passé sur les suites).

7) Proposition

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

Démonstration :

Si (a_n) est une suite convergeant vers L , alors $\|a_n - L\|$ est une suite convergeant vers 0.

Soit $a_{\varphi(n)}$ une suite extraite de a_n , alors $\|a_{\varphi(n)} - L\|$ est une suite extraite de $\|a_n - L\|$, le cours sur les suites réelles de l'an passé permet d'affirmer que $\|a_{\varphi(n)} - L\|$ converge et de même limite que $\|a_n - L\|$, à savoir 0.

Ainsi $a_{\varphi(n)}$ converge vers L .

Exemple : montrer que la suite de terme général $n(1 + (-1)^n)$ diverge.

III. Topologie d'un evn

1) Définition

On dit qu'un point x est intérieur à une partie A de E s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

2) Définition

Soit U une partie de E , on dit que U est un ouvert de E , ou une partie ouverte de E si : $\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$.

Remarques : si $B_f(x, r) \subset U$ alors $B(x, r) \subset U$, alors $B(x, \frac{r}{2}) \subset U$.

3) Proposition

Toute boule ouverte est ouverte.

Démonstration :

Faire un dessin!!! Pour x dans une boule de centre a et de rayon R , il suffit de considérer la boule de centre x et de rayon $R - \|x - a\|$.

4) Proposition

La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte.

L'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouverte.

Attention : une intersection quelconque d'ouverts peut ne pas être ouverte.

En effet : si $U_n =]\frac{-1}{n}; \frac{1}{n}[$ pour n entier non nul, alors $\bigcap U_n = \{0\}$ qui est fermé, alors que U_n est ouvert.

Démonstration :

(pour l'union) Soit $\bigcup_{i=1}^n U_i$ une réunion d'ouverts.

Soit $x \in \bigcup_{i=1}^n U_i$, $\exists i_0$ tel que $x \in U_{i_0}$, or U_{i_0} est un ouvert donc il existe une boule ouverte centrée en x et incluse dans U_{i_0} , donc incluse dans $\bigcup_{i=1}^n U_i$.

5) Partie fermée

a) Définition

On dit qu'une partie de E est une partie fermée de E , si son complémentaire est ouvert.

Remarque : il est clair que E et \emptyset sont fermés.

b) Caractérisation séquentielle des parties fermées

Une partie A de E est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A .

Démonstration :

Supposons A fermée.

Soit $a_n \rightarrow L$, une suite d'éléments de A convergeant vers L , montrons que $L \in A$.

Supposons que $L \in E \setminus A$, comme A est fermée alors $E \setminus A$ est ouverte.

Ainsi : $\exists r > 0$ tel que $B(L, r) \subset E \setminus A$.

Comme $a_n \rightarrow L$, $\exists n_0, \forall n \geq n_0, a_n \in B(L, r)$, donc $a_n \in E \setminus A$, ce qui est absurde puisque a_n est à valeurs dans A .

Réciproquement :

Supposons que toute suite convergente d'éléments de A appartient à A , et que A n'est pas fermée.

Comme A n'est pas fermée, alors $E \setminus A$ n'est pas ouverte. Ainsi, il existe $x \in E \setminus A$ tel que $\forall r > 0, B(x, r) \not\subset E \setminus A$.

En particulier, pour $r = 2^{-n}$, $B(x, 2^{-n}) \not\subset E \setminus A$.

Or $B(x, 2^{-n}) \cap A$ est non vide, donc on peut choisir un élément a_n dans $B(x, 2^{-n}) \cap A$.

On construit ainsi une suite a_n qui converge vers x et $x \notin A$.

c) Proposition

Toute boule fermée est une partie fermée.

d) Proposition

L'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.

La réunion d'une famille finie de fermés est fermée.

6) Point adhérent

a) Définition

On dit qu'un point x est adhérent à une partie A de E si pour tout $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A , on le note \bar{A} .

b) Proposition

Un point x est adhérent à une partie A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x .

Remarque : une partie A est fermée si $\bar{A} \subset A$, et alors $A = \bar{A}$.

7) Intérieur

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . On dit qu'un point x est intérieur à A si A est un voisinage de x , cela revient à dire qu'il existe un $r > 0$ tel que la boule de centre x et de rayon r est contenue dans A .

On appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs à A , noté $\overset{\circ}{A}$. L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A .

8) Frontière

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E . On dit qu'un point $x \in E$ est un point frontière de A si toute boule centrée en x rencontre à la fois A et le complémentaire de A .

La frontière de A est l'ensemble des points frontières de A , notée $\text{Fr}(A)$.

9) Densité

Soit A une partie de E .

Une partie D de A est dite dense dans A si l'une des 3 propriétés équivalentes est vérifiée :

- l'adhérence de D contient A
- pour tout a de A , et pour tout $r > 0$, il existe $x \in D$, tel que $\|x - a\| \leq r$
- pour tout a de A , il existe une suite d'éléments de D qui converge vers a .

IV. Comparaison de normes

1) Définition

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E .

On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$.

Ainsi : $\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$.

2) Proposition

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, N_2(x) = 1 \implies N_1(x) \leq \alpha$.

3) Proposition

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E , avec N_1 dominée par N_2 .

Si une partie de E est bornée pour la norme N_2 alors elle l'est également pour N_1 .

4) Proposition

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E , avec N_1 dominée par N_2 .

Si une suite converge vers un élément L de E pour la norme N_2 alors elle converge également vers L pour N_1 .

Démonstration :

Évidente, il suffit d'écrire les définitions de normes dominées et de suite convergente.

5) Normes équivalentes

a) Définition

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E , on dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Remarque : ainsi si on peut construire une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \rightarrow 0$$

alors N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes !

b) Conservation du caractère borné d'une partie

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E , une partie est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2 .

c) Conservation du caractère convergent d'une suite

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E , une suite converge vers un élément L de E pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers L pour la norme N_2 .

d) Conservation des ouverts et fermés

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E , une partie A de E est :

- ouverte pour N_1 si et seulement si elle est ouverte pour N_2 ;
- fermée pour N_1 si et seulement si elle est fermée pour N_2 .

Démonstration :

Si A est fermée par exemple pour la norme N_1 , montrons que A est fermée aussi pour N_2 . Supposons que $a_n \rightarrow L$ avec a_n suite d'éléments de A , montrons donc que $L \in A$. La suite (a_n) converge pour N_1 , elle converge donc pour N_2 , donc $L \in A$.

Si A est ouverte, alors son complémentaire est fermé, or N_1 et N_2 conservent les fermés... donc les ouverts !

e) Équivalence des normes en dimension finie (théorème admis)

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

V. Compléments de topologie

1) Suites de Cauchy

a) Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

Soit (u_n) une suite bornée de E , soit $\delta_n = \sup\{\|u_p - u_q\|, p \geq n, q \geq n\}$.

On dit que u_n est de Cauchy si la suite réelle δ_n tend vers 0.

b) Relations entre suite extraite et suite de Cauchy

- Une suite convergente est une suite de Cauchy.
- Une suite extraite d'une suite de Cauchy est encore une suite de Cauchy.
- Une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente !

Démonstration :

Il suffit d'écrire les définitions de suite convergente, extraite et de Cauchy !

Pour la première proposition, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\|u_p - u_q\| \leq \|u_p - L\| + \|L - u_q\| \dots$$

Contre-exemple : sur \mathbb{Q} , $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ est une suite de Cauchy mais elle converge vers $e \notin \mathbb{Q}$.

2) Espaces complets

a) Définition

Un espace vectoriel normé est dit **complet** si, dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente. On dit aussi que c'est un espace de Banach.

b) Propriétés

Toute partie fermée d'un espace vectoriel normé complet E est complète.

Toute partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée.

Démonstration :

Soit A une partie fermée de E .

Soit (a_n) une suite de Cauchy d'éléments de A .

Comme A inclus dans E , et E complet, on sait que (a_n) converge vers $L \in E$.

Or A est fermée donc $L \in A$.

La deuxième proposition est évidente...

c) Exemples

Les espaces \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont complets.

Démonstration :

Lemme : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet. C'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Montrons que \mathbb{R}^n est complet.

Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, on peut travailler par exemple avec la norme 1.

Soit (x_p) une suite de Cauchy de \mathbb{R}^n .

On a $x_p = (x_{p,1}, \dots, x_{p,n})$ et $\|x_p\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_{p,k}|$.

On a : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \|x_p - x_q\|_1$, donc $x_{p,k}$ est une suite de Cauchy de \mathbb{R} complet, donc elle converge, soit $y_k = \lim_{p \rightarrow +\infty} x_{p,k}$.

Soit $y = (y_1, \dots, y_n)$.

d) Convergence et coordonnées

La convergence d'une suite se ramène à la convergence de ses coordonnées.

Ainsi, si $z_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors $z_n \rightarrow L \Leftrightarrow [\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(L) \text{ et } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(L)]$.

3) Espaces compacts

a) Définition

Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite compacte si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge dans A .

b) Propriété

Dans un espace vectoriel normé, une partie compacte est fermée et bornée.

Démonstration :

Soit A une partie compacte non vide d'un evn E .

Montrons que A est bornée.

Supposons que A ne soit pas bornée. Comme A n'est pas bornée, il existe deux éléments de A tels que la distance les séparant soit supérieure à 1.

Appelons-les a_0 et a_1 , ainsi $\|a_0 - a_1\| \geq 1$.

Soit a_0, \dots, a_{n-1} n éléments de A tels que : $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \|a_i - a_j\| \geq 1$.

Soit B la réunion de toutes les boules ouvertes centrées en a_i et de rayon 1.

En tant qu'union d'ouverts, B est ouverte.

Comme A n'est pas bornée, A n'est pas incluse dans B , donc il existe $a_n \in A \setminus B$.

Donc $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, \|a_i - a_j\| \geq 1$.

Toute suite extraite de a vérifiera $\|a_{i'} - a_{j'}\| \geq 1$, donc ne converge pas !

Montrons que A est fermée.

Montrons donc que $\bar{A} \subset A$.

Soit $a \in \bar{A}$, il existe $a_n \rightarrow a$, or A compact donc il existe une sous-suite de a_n qui converge dans A . Mais toutes les sous-suites ont la même limite, donc $a \in A$.

c) Fermé dans un compact (admis)

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé E .

Si B est une partie fermée de A alors B est une partie compacte de E .

d) Théorème (admis)

Une partie de \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

4) Continuité

a) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D (partie non vide de E) à valeurs dans F .

On dit que f admet une limite $b \in F$ en $a \in D$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| < \alpha \implies \|f(x) - b\|_F < \varepsilon$$

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Une fonction f est continue en $a \in D$ si f admet une limite en a .

Remarque : une fonction f est dite continue sur $A \subset D$ si f est continue en tout point a de A .

b) Exercice « classique »

Soit E et F deux evn, soit $f : E \rightarrow F$, continue.

Soit $A \subset E$. Montrer que si A est dense dans E , alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

A est dense dans E si et seulement si tout point de E est limite d'une suite d'éléments de A .

Soit $y \in f(E)$, il existe $x \in E$, tel que $y = f(x)$.

Puisque A est dense dans E , $\exists(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Par continuité de $f : \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$.

Et y est limite d'une suite d'éléments de $f(A)$...

c) Théorème important

Soit f une fonction définie sur un ensemble D à valeurs dans F (F étant un evn et D une partie de E evn).

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est continue
- pour tout ouvert V de F , $f^{-1}(V)$ ouvert de A
- pour tout fermé W de F , $f^{-1}(W)$ fermé dans A .

Démonstration :

Soit V un ouvert de F .

Pour tout $a \in f^{-1}(V)$, $b = f(a) \in V$.

Or V est un ouvert, donc V est un voisinage de b .

Donc il existe U voisinage de a tel que $U \cap A \subset f^{-1}(V)$.

Ainsi, $f^{-1}(V)$ est voisinage de a relatif à A .

d) Exercice « classique »

Soit E et F deux evn, soit $f, g : E \rightarrow F$, continues.

Montrer que $A = \{x \in E, f(x) = g(x)\}$ est fermé et $B = \{x \in E, f(x) < g(x)\}$ est ouvert.

Il suffit de poser $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, application continue.

$A = \varphi^{-1}(\{0\})$, or φ est continue et $\{0\}$ est un fermé donc A fermé.

$B = \varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$, or φ est continue et $] - \infty, 0[$ est un ouvert donc B ouvert.

e) Continuité uniforme

Une fonction f de D dans F est dite uniformément continue sur $A \subset D$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\| < \alpha \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$.

Remarque : si f est uniformément continue sur A , alors f est continue sur A .

f) Fonctions lipschitziennes

Une fonction définie sur D est dite lipschitzienne sur $A \subset D$ si l'ensemble

$$R = \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|} \text{ avec } (x, y) \in A^2 \text{ et } x \neq y \right\}$$

est borné.

Pour $k = \sup(R)$, on précise que f est k -lipschitzienne.

5) Théorème

a) Théorème de Heine

Soit A une partie compacte de E et $f : A \rightarrow F$ une application continue, alors f est uniformément continue et $f(A)$ est une partie compacte de F .

Démonstration :

Si f n'est pas uniformément continue, alors on pourrait construire une suite extraite $x_n - y_n$ telle que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, mais on pourrait alors extraire une suite qui, elle, va converger, d'où une contradiction.

Par définition, toute suite d'éléments de $f(A)$ s'écrit $f(x_n)$ où x_n est une suite d'éléments de A compacte...

b) Exercice classique n°1

Soit (x_n) une suite convergente d'un evn E . Soit x sa limite.

Montrer que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de E .

Toute suite extraite de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ converge dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$...

c) Exercice classique n°2

Soit E un evn, montrer que toute partie compacte A de E est complète.

Soit A compacte. Soit a_n une suite de Cauchy dans A , montrons qu'elle converge dans A .

Il existe une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence L .

Or comme a_n est de Cauchy, elle va converger vers L ($\|a_n - L\| \leq \|a_{\varphi(n)} - L\| + \|a_n - a_{\varphi(n)}\| \leq \varepsilon + \varepsilon \dots$).

6) Cas des applications linéaires

Pour une fonction f de E dans F , linéaire, les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est continue sur E
- f est continue au point 0_E
- f est bornée sur la boule unité fermée : $B_f(0_E, 1)$
- il existe $k \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$
- f est k -lipschitzienne

Démonstration :

$ii) \Rightarrow iii) : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_F \leq \varepsilon.$

En particulier pour $\varepsilon = 1, \exists \eta > 0, \|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1.$

Soit $x \in B_f(0_E, 1), \exists \alpha > 0$ tel que $\|\alpha x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(\alpha x)\|_F \leq 1$, soit $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\alpha}.$

$iii) \Rightarrow iv) : \exists k > 0, \forall x \in E, \|x\|_E \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq k.$

Soit $x \in E, \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_F \leq k \dots$ Les autres implications sont évidentes !

Remarque : il existe donc des applications linéaires non continues...

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$

Soit $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$

On définit : $D : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (F, \|\cdot\|_\infty), f \rightarrow f'.$

À l'aide de la suite (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$, expliquer pourquoi D n'est pas continue.

7) Cas de la dimension finie

- **Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.**

Démonstration :

Démonstration indicative : le produit d'espaces complets est complet.

- **Dans un evn, tout sous-espace de dimension finie est complet donc fermé.**

Démonstration :

Une suite qui converge est une suite de Cauchy. Comme l'espace est complet, la limite est dans E , donc $\bar{E} \subset E$.

- **Dans un evn de dimension finie, une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.**

Démonstration :

C'est une application des propositions précédentes sur les compacts.

- **Soient E et F deux espaces vectoriels normés, E de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.**

Démonstration :

C'est une application directe des propositions sur la continuité.

8) Espaces de Hilbert

Un espace préhilbertien E (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire) est dit de Hilbert s'il est complet.

9) Norme d'application

a) Définition

On désigne par $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, l'application $f \rightarrow \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|_F$ est une norme.

Démonstration :

L'axiomatique de la norme est vérifiée facilement.

Remarque : la notation norme triple $\|f\|$ est souvent remplacée par $\|f\|$.

b) Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E^*} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Démonstration :

En exercice (n°26).

c) Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, alors $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$.

Démonstration :

Pour $x \neq 0$, $\|f\| = \sup_{x \in E^} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$, donc $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f\|$ et $\|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$.*

Comme la relation est aussi vérifiée pour $x = 0$, on a finalement : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$.

10) Un exemple important : les espaces ℓ^p

a) Définition

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace ℓ^p est l'ensemble des suites (x_n) de nombres réels ou complexes telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$$

Pour $p = +\infty$, $\ell^\infty = \{(x_n), \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$.

b) Normes

La norme associée à l'espace ℓ^p est :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Pour ℓ^∞ , $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

c) Propriétés

- Les espaces ℓ^p munis de leur norme associée sont complets.
- Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors $\ell^p \subset \ell^q$; plus précisément, si $x \in \ell^p$ alors $x \in \ell^q$ et $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

Exemple : soit (x_n) la suite définie par $x_n = (-1)^n$, montrer que $(x_n) \in \ell^\infty$ et préciser $\|x_n\|_\infty$.

Exercice d'application : les inégalités fondamentales sur ℓ^p

Énoncé. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (exposants conjugués), et ℓ^∞, ℓ^p les espaces définis ci-dessus.

- 1) (*Inégalité de Young*) Montrer que pour tous réels $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

- 2) (*Inégalité de Hölder*) En déduire que pour $x = (x_n) \in \ell^p$ et $y = (y_n) \in \ell^q$, la série $\sum x_n y_n$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

- 3) (*Inégalité de Minkowski*) En déduire que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire sur ℓ^p , c'est-à-dire que pour $x, y \in \ell^p$:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Corrigé.

1) *Inégalité de Young*. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est immédiate. Supposons $a, b > 0$. La fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* , donc pour $t \in [0, 1]$ et $u, v > 0$:

$$\ln(tu + (1-t)v) \geq t \ln u + (1-t) \ln v$$

En appliquant ceci à $t = \frac{1}{p}$, $1-t = \frac{1}{q}$, $u = a^p$, $v = b^q$:

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln a + \ln b = \ln(ab)$$

Par croissance de l'exponentielle, on obtient $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

2) *Inégalité de Hölder*. Si $\|x\|_p = 0$ ou $\|y\|_q = 0$, l'inégalité est triviale ($x = 0$ ou $y = 0$). Supposons donc $\|x\|_p \neq 0$ et $\|y\|_q \neq 0$, et posons, pour tout n :

$$a_n = \frac{|x_n|}{\|x\|_p}, \quad b_n = \frac{|y_n|}{\|y\|_q}$$

D'après l'inégalité de Young :

$$a_n b_n \leq \frac{a_n^p}{p} + \frac{b_n^q}{q}$$

En sommant sur n (les séries du membre de droite convergent par construction, vers $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ respectivement) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \leq \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p + \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge et est majorée par 1, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n y_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq 1 \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

La série $\sum x_n y_n$ converge donc absolument, et l'inégalité de Hölder est établie.

3) *Inégalité de Minkowski*. Si $x + y = 0$, l'inégalité est triviale. Supposons $\|x + y\|_p \neq 0$. On écrit :

$$|x_n + y_n|^p = |x_n + y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq |x_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} + |y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$. On somme sur n , puis on applique l'inégalité de Hölder à chacun des deux termes, avec l'exposant conjugué q de p (on a $(p-1)q = p$) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1}$$

et de même $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1}$.

En sommant :

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}$$

On divise par $\|x + y\|_p^{p-1}$ (non nul par hypothèse) pour conclure :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

ce qui est l'inégalité triangulaire recherchée pour $\|\cdot\|_p$; combinée à la séparation et à l'homogénéité (immédiates), cela achève de montrer que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur ℓ^p .

VI. Exercices

Exercice n°1 (oraux concours)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $S = S(0_E, 1)$.

- 1) Montrer que $x \in S \mapsto \|u(x)\| \in \mathbb{R}$ admet un maximum noté $\|u\| = \max_{x \in S} \|u(x)\|$.
- 2) Montrer que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|$.
- 3) Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), |\lambda| \leq \|u\|$.

- 4) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \|u\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
- 5) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Exercice n°2

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : K \rightarrow K$ telle que : $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. On veut montrer que f possède un unique point fixe dans K .

- 1) Soit $\varphi : x \rightarrow \|f(x) - x\|$, montrer que φ est continue sur K .
- 2) Démontrer que φ admet et atteint sa borne inférieure en $x = a$.
- 3) On suppose que $f(a) \neq a$.
 - a) En posant $b = f(a)$, montrer que $\|f(b) - b\| < \|f(a) - a\|$.
 - b) Conclure.

Exercice n°3 (*écrits concours*)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne.

Soit $A = \{(x, y) \in E, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y = 0\}$.

Soit $B = \{(x, y) \in E, \|(x, y)\| < 1 \text{ et } (x, y) \notin A\}$.

- 1) Montrer que A est fermée.
- 2) Montrer que B est ouverte.
- 3) Montrer que l'intérieur de A , $\overset{\circ}{A}$, est vide.
- 4) Montrer que \overline{B} contient $B_0((0, 0), 1)$.
- 5) A-t-on toujours $\overline{\overset{\circ}{M}} = \overline{M}$? $\overset{\circ}{\overline{M}} = \overset{\circ}{M}$?

Exercice n°4

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 2) Démontrer que pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leq \sqrt{n} \|A\|$.

(Ind. introduire le produit scalaire : $(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$.)

Exercice n°5

Les deux questions sont indépendantes :

- 1) Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . Pour $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| / a \in A\}$. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est définie et continue sur E .
- 2) Soit E un evn et F un sev de E , F étant d'intérieur non vide. Montrer que $\overline{F} = E$.

Exercice n°6

Montrer que l'application : $N : P \rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)|$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Exercice n°7 (*oraux concours*)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$$

alors f est la fonction nulle.

Exercice n°8

Les deux questions sont indépendantes :

- 1) Montrer que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .
- 2) Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E , montrer que l'adhérence de A est fermée.

Exercice n°9

Soit E un evn, et F un sous-espace vectoriel de E , montrer que l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice n°10

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose qu'on dispose d'une norme $\|\cdot\|$ sur E .

On suppose qu'on dispose également d'une application linéaire injective $u : F \rightarrow E$.

Montrer que : $N : F \rightarrow \mathbb{R}^+, x \rightarrow \|u(x)\|$ est une norme sur F .

Exercice n°11

Montrer que pour x de \mathbb{K}^n , on a : $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

Exercice n°12 (oraux concours)

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .
 (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de $E, N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
 (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Indication, pour 1)c) : on montrera, à l'aide du 1)b), que l'application Id de (E, N_∞) vers (E, N_1) est continue... Que peut-on dire de l'image réciproque d'un ouvert par une application continue ?

Exercice n°13 (oraux concours)

Soit E un espace vectoriel normé. On considère deux sous-ensembles A et B de E .

On définit $d(A, B) = \inf\{d(a, b), (a, b) \in A \times B\} = \inf\{\|a - b\|, (a, b) \in A \times B\}$.

On souhaite montrer que $d(\overline{A}, \overline{B}) = d(A, B)$.

- 1) En réfléchissant sur les ensembles \overline{A} et \overline{B} , démontrer que $d(\overline{A}, \overline{B}) \leq d(A, B)$.
- 2) Montrons à présent que $d(A, B) \leq d(\overline{A}, \overline{B})$.
 - a) Soit $\varepsilon > 0$, justifier l'existence de x dans \overline{A} et y dans \overline{B} , tels que $\|x - y\| \leq d(\overline{A}, \overline{B}) + \varepsilon$.
 - b) Justifier l'existence d'une suite (a_n) de A telle que $a_n \rightarrow x$, de même une suite (b_n) de B telle que $b_n \rightarrow y$.
 - c) Démontrer alors que $\|a_n - b_n\| \rightarrow \|x - y\|$ et que, pour n assez grand, $\|a_n - b_n\| \leq \|x - y\| + \varepsilon$.
 - d) Justifier que $d(A, B) \leq \|a_n - b_n\|$ et $d(A, B) \leq d(\overline{A}, \overline{B}) + 2\varepsilon$.
 - e) Conclure !

Exercice n°14 (oraux concours)

Soit A une partie non vide d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E .

- 1) Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.
- 2) Démontrer que : $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.
- 3) Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors \overline{A} est un sous-espace vectoriel de E .
- 4) Démontrer que si A est convexe alors \overline{A} est convexe.

Exercice n°15

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivable en 0. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice n°16

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , soit $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, on note uv l'application $u \circ v$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

- 1) Justifier l'existence de $\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.
- 2) Justifier l'existence de $\sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|$.
- 3) Démontrer que : $\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|$.
- 4) On note $N(u) = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, montrer que N est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
- 5) Montrer que $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $N(uv) \leq N(u)N(v)$.
- 6) Démontrer que u est continue.

Exercice n°17

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $N(AB) \leq cN(A)N(B)$.

Exercice n°18

Soit n un entier naturel, montrer qu'il existe $\lambda > 0$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$.

Exercice n°19

- 1) Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |x_1 + tx_2|$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Représenter la boule unité fermée pour cette norme.

Exercice n°20 (*)

On suppose que E et F sont deux \mathbb{R} -evn.

Soit $f : E \rightarrow F$, $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que si f est continue en 0_E alors f est linéaire.

Exercice n°21 (*)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ avec la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$.

Montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte.

Ind. Soit $f_n(t) = e^{2in\pi t}$, montrer que f_n n'admet aucune sous-suite qui converge.

Exercice n°22

Montrer que la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^+ (on distinguera par exemple sur l'intervalle $[0, 2]$ puis sur $[1, +\infty[$).

Exercice n°23 (*écrit concours*)

On considère un espace vectoriel normé E , de dimension finie, et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E . On définit la suite $(v_n)_n$, appelée moyenne de Cesàro de $(u_n)_n$, par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}$.

1°) Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers une limite L implique la convergence de la suite $(v_n)_n$ vers la même limite.

2°) La réciproque est-elle exacte ?

(*ind. penser à $(-1)^n$*)

Exercice n°24

Soient E un espace vectoriel normé et $T : E \rightarrow E$ définie par :

$$T(u) = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \leq 1 \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que T est au moins 2-lipschitzienne.

(*Ind. on distinguera les cas, et on remarquera que pour $\|u\| > 1$ et $\|v\| > 1$, $\|v\|u - \|u\|v = \|v\|(u - v) + (\|v\| - \|u\|)v$.)*)

Exercice n°25

Montrer que N_1 et N_2 , normes sur E , sont équivalentes si, et seulement si, Id_E est bicontinue de (E, N_1) vers (E, N_2) .

(*Ind. on se souviendra que Id est une application linéaire...*)

Exercice n°26

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on définit $\|f\|$ par $\|f\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$.

Montrer que $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E^*} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Exercice n°27

Pour $n \geq 2$, montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n ne sont pas issues d'un produit scalaire.

(*Ind. on supposera que la norme est issue d'un produit scalaire φ , on utilisera l'identité de polarisation, et pour des vecteurs d'une base orthonormée e_1 et e_2 , on montrera que $\varphi(e_1, e_2) \neq 0$.)*)

Exercice n°28

Voici un exercice proposé par ChatGPT :

Soit $T : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \int_0^1 f(x) dx$. Calculez la norme d'opérateur de T .

- 1) Critiquer l'énoncé et le corriger.
- 2) Répondre à la question (penser à une fonction constante).

Exercice n°29

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, et soit $\varphi : f \rightarrow \int_0^1 tf(t) dt$.

- 1) Justifier que pour $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty$ est bien définie.
- 2) Justifier que φ est bien une forme linéaire.
- 3) Calculer la norme de φ .

Exercice n°30

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Soit l'application $u : f \rightarrow u(f)$ où $u(f)(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$.

- 1) Montrer que u est un endomorphisme de E .
- 2) Montrer que u est continue.
- 3) Montrer que $\|u\| = 1$ (ind. on pourra considérer l'application f constante).

Exercice n°31

Soit E un evn, on considère un compact X et un fermé Y de E , montrer que $X + Y$ est fermé.

Exercice n°32 (oraux de concours)

On rappelle que l'application : $f \rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ définit une norme sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, et pour $f \in E_1$, on note : $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.

- 1) Montrer que $f \rightarrow \|f\|$ définit une norme sur E_1 .
- 2) Montrer que $\forall f \in E_1, \|f\|_\infty \leq \|f\|$.
- 3) Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?
- 4) On désigne par (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{n}$. « Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ ».
 - a) Pourquoi la question ainsi posée manque-t-elle de précision ?
 - b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) dans le contexte de l'exercice.

Exercice n°33

Soit $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ défini par $T(P) = P'$.

Étudier la continuité de T lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme :

- 1) $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$
- 2) $N_2(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$

Exercice n°34

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$, on considère l'opérateur de dérivation $D : E \rightarrow E, f \rightarrow f'$.

Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E , D n'est jamais une application linéaire continue de (E, N) dans (E, N) .

Ind. penser à étudier la suite de fonctions $f_n(x) = e^{nx}$.

Exercice n°35

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme infinie ($\sup |a_k|$).

Soit $T : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ définie par $T(P) = XP$.

Démontrer que T est continue et calculer sa norme.

Exercice n°36

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $N(A) = \sup_{i=1 \dots n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$.

- 1) Montrer que l'application trace : $E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
- 2) Calculer sa norme (on pensera à l'identité...).

Exercice n°37

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées (u_n) muni de $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

On définit : $T : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ par $Tu = v$ où $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$.

- 1) Justifier que T est continue.
- 2) Calculer sa norme (penser à la suite constante égale à 1).

Exercice n°38 (*écrits concours*)

Soit E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique, et de la norme associée.

On considère 3 vecteurs de E : x , a et b tels que $a \neq b$ et $\|x - a\| = \|x - b\|$.

On veut montrer que $\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x - a\|$.

- 1) En constatant que $\|x - a\|^2 = \|x - b\|^2$, montrer que $2(x, b - a) = \|b\|^2 - \|a\|^2$. (1)

- 2) Soit $\Delta = \|x - a\|^2 - \left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2$.

- a) En remarquant que $\Delta = \|x - a\|^2 - \left\|x - a + \frac{a-b}{2}\right\|^2$, montrer que $\Delta = -(x - a, a - b) - \frac{\|a - b\|^2}{4}$.

- b) Démontrer que $\|x - a\| = \|x - b\|$ implique que $x - \frac{a+b}{2}$ est orthogonal à $b - a$.

- c) Justifier que $\|x - a\|^2 = \left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{a+b}{2} - a\right\|^2$.

- d) Justifier que $\|x - a\|^2 = \left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{\|a - b\|^2}{4}$.

- e) Conclure!

Exercice n°39 (*écrits concours*)

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E .

- 1°) Montrer que : A fermée $\iff \text{Fr}(A) \subset A$.
- 2°) Montrer que : A ouverte $\iff A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$.

Ind. pour le 2) et le sens \implies , on remarquera que : $\text{Fr}(E \setminus A) = \text{Fr}(A)$.

Pour le 2) et le sens \impliedby , on se souviendra que $\bar{A} = \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$, et on montrera que $A = \mathring{A}$.

Exercice n°40

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, déterminer $\bar{\mathbb{Q}}$, $\mathring{\mathbb{Q}}$ et $\text{Fr}(\mathbb{Q})$.

Exercice n°41

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On souhaite montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue ssi $A = \{x \in E, \|f(x)\|_F = 1\}$ est un fermé de E .

- 1) On suppose $f \in \mathcal{L}(E, F)$ continue, montrer que : $\{x \in E, \|f(x)\|_F = 1\}$ est un fermé de E .
- 2) Réciproquement.
 - a) Si f n'est pas continue, construire une suite b_n telle que $\|b_n\|_E \leq 1$ et $\|f(b_n)\|_F > n$.
 - b) Montrer que pour tout n , $\frac{b_n}{\|f(b_n)\|} \in A$.
 - c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{\|f(b_n)\|} \notin A$.
 - d) Conclure!

Exercice n°42

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et l'application de E dans E :

$$f : x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$$

- 1) Montrer que f réalise une bijection de E sur la boule unité ouverte, et déterminer f^{-1} .
- 2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{(1 + 2\|x\|) \times \|y - x\|}{(1 + \|x\|) \times (1 + \|y\|)}$$

- 3) Montrer que f est 1-lipschitzienne.

Deuxième année classe préparatoire, INP des Hauts-de-France, lycée Fénélon Cambrai, M. Calciano