Chapitre 11 : Topologie, continuité

I. Topologie de $\mathbb{R}$

Définitions :

1) voisinage d'un point
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
Une propriété portant sur une fonction est dite vraie **au voisinage d'un point a** (a$\in \bar{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$) si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert non vide centré en a si a$\in$ $\mathbb{R}$, avec un intervalle du type]c,+∞[si a=+∞, avec un intervalle du type]- ∞ ;c[si a = -∞

2) intérieur
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle **intérieur de I, noté I°,** l'intervalle obtenu en supprimant de I ses éventuelles extrémités :
Ainsi, Pour I = [a,b] (a et b réels), I° =]a ;b[
Pour I = [a ;+∞[, I° =]a ;+ ∞[

Exemples :
Déterminer les intérieurs des intervalles :
I = [-2 ;3]
J = [-5 ; 4[
K = [2 ;+ ∞[

3) adhérence
Soit $x_0\in$ $\mathbb{R}$, x_0 est dit **adhérent** à A si $\forall\delta > 0$, $]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A \neq \emptyset$

On appelle **adhérence d'un intervalle I, notée $\bar{I}$,** l'intervalle de mêmes extrémités que I et contenant les éventuelles extrémités réelles de I.
Pour I =]a ;b[, on a $\bar{I}$ = [a;b]
Pour I =[a ;+∞[, $\bar{I}$ = [a ;+∞[

Exemples :
Déterminer les adhérences des intervalles :
I = [-2 ;3]
J = [-5 ; 4[
K = [2 ;+ ∞[

4) Théorème
Soit A$\subset$ $\mathbb{R}$, et $x_0\in$A, alors $x_0\in$ $\bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x_0

II. Limites

1) Limites finies
   a) définition
   Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et L $\in$ $\mathbb{R}$
   Si I est non majoré
   On dit que f(x) tend vers L lorsque x tend vers + ∞ si : $\forall\varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq M \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

Si I non minoré
On dit que f(x) tend vers L lorsque x tend vers - ∞ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq M \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

Soit f une fonction de I dans ℝ, et L ∈ ℝ. On considère a un réel de I ou une de ses extrémités.
On dit que f(x) tend vers L lorsque x tend vers a si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

Exemple : Soit f(x) = x^n, démontrer que f(x) tend vers 0 pour x tendant vers 0.

Démonstration :
Soit $\varepsilon > 0$*, on cherche* $\eta > 0, \forall x \in I, (|x| \leq \eta \Longrightarrow |x^n| \leq \varepsilon$*, et* $|x^n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x|^n \leq \varepsilon$*, il suffit de prendre* $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$

Remarques
On note également : f(x)$\rightarrow_{x\rightarrow a}$L

b) Proposition
Soit f une fonction de I dans ℝ, si f a une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon = 1$, , $\exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq 1$

Donc pour $x \in I$, $|x - a| \leq \eta$*, on a :* $|f(x)| \leq 1 + L$

2) Limites infinies
a) Définition :
Soit f une fonction de I dans ℝ, a une extrémité de I
Si a est réel :
On dit que f(x) tend vers ∞ lorsque x tend vers a si :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A$

Si a=+∞
On dit que f(x) tend vers +∞ lorsque x tend vers +∞ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A$

Si a=-∞
On dit que f(x) tend vers +∞ lorsque x tend vers -∞ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq B \Longrightarrow f(x) \geq A$

Remarque
Soit f une fonction de I dans ℝ, a une extrémité de I, on dit que f(x) tend vers -∞, lorsque x tend vers a si -f(x) tend vers +∞ si x tend vers a.

3) Théorème
Soit f : $I \to \mathbb{R}$ une fonction, $(L_1 ; L_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$ alors $L_1 = L_2$, on parle d'unicité de la limite de f en a.

Démonstration :

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta 1 > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \eta 1 \Longrightarrow |f(x) - L1| \leq \varepsilon$

Et : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta 2 > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \eta 2 \Longrightarrow |f(x) - L2| \leq \varepsilon$

D'où pour, $\forall x \in I, (|x-a| \leq min\ (\eta_1 ; \eta_2), |f(x) - L1| \leq \varepsilon\ et |f(x) - L2| \leq \varepsilon$

Or $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \leq 2\varepsilon$

Pour $\varepsilon = 1/n$ *et passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient* $L_1 = L_2$

4) Limite et Continuité (approche de la continuité par la notion de limite)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, si f est définie en « a », alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
On dit alors que f **est continue** en a.
Dans le cas contraire, on dit qu'elle **est discontinue**

Démonstration :
Supposons que $L = +\infty$ *(même raisonnement pour* $-\infty$*)*

On a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *donc* $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A$

Pour $A = f(a)+1$*, on a dans le voisinage de « a » :* $f(x) \geq f(a)+1$
En particulier, $f(a) \geq f(a)+1$*, ce qui est impossible*
Donc $L \in \mathbb{R}$

De $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$*, on a :* $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$
En particulier, $|f(a) - L| \leq \varepsilon$*, en faisant tendre* ε *vers 0, on obtient* $f(a) = L$

Exemple : Démontrer que la fonction $x \to |x|$ est continue en tout point.
Immédiat car : $||x|-|a|| \leq |x-a|$

5) Méthode très utile pour déterminer une limite.
Soit f : $I \to \mathbb{R}$ une fonction et L un réel, s'il existe une fonction g : $I \to \mathbb{R}$ telle que :
$|f - L| \leq g$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Démonstration :
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$*, alors :* $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |g(x)| \leq \varepsilon$
De plus, $|f - L| \leq g$*, donc* $\forall x \in I$*,* $|f(x)-L| \leq g(x)$
Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq |g(x)| \leq \varepsilon$
D'où $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$
Exemple : Soit a>0, pour tout x≥0, montrer que $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$
En déduire que la fonction racine carrée est continue en a pour a>0.

6) Utilisation des suites

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ une fonction possédant une limite finie ou infinie L en a. Alors pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et tendant vers a,
on a : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) =$ L.

Démonstration: (nous traitons ici le cas d'une limite finie)
Si $\lim_{x\to a} f(x)$ *=L, on a :* $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I\,, (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$
De plus : $\lim_{n\to\infty} x_n$ *= a, on a :* $\forall\varepsilon > 0, \exists N\in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \varepsilon$
Donc pour $\varepsilon = \eta$*, on a ,* $\exists N\in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \eta$ *et* $|f(xn) - L| \leq \varepsilon$

Exemple : Montrer que la fonction sinus n'a pas de limites en $+\infty$
Supposons que le sinus ait une limite en $+\infty$, alors $\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)$ et $\sin(\pi+2n\pi)$ auraient la même limite…

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ une fonction une fonction et L$\in \overline{\mathbb{R}}$
Si pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et tendant vers a, on a : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) =$ L, alors la fonction f a pour limite L en a.

Démonstration :
Il y aurait 9 cas à distinguer, on va traiter ici le cas où a=$+\infty$ *et L est finie.*
On : $\lim_{n\to\infty} x_n$ *=*$+\infty$ *et* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ *= L, supposons que f n'ait pas L comme limite en* $+\infty$*, alors :* $\exists\varepsilon > 0, \forall A > 0, x \geq A$ *et* $|f(x) - L| > \varepsilon$
En particulier pour A = n, et en faisant varier n dans $\mathbb{N}$*, on construit une suite* x_n *vérifiant* $|f(x_n)-L|> \varepsilon$
Or $\lim_{n\to\infty} x_n$ *=*$+\infty$ *(par minoration) et la passage à la limite dans* $|f(x_n)-L|> \varepsilon$ *donne* $0> \varepsilon$ *Absurde !*

III. Limites et continuité à gauche, à droite

1) Définition

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I.
La fonction f est continue à droite en a, si $f_{I\cap[a;+\infty[}$ est continue en a.
La fonction f est continue à gauche en a, si $f_{I\cap]-\infty;a]}$ est continue en a.

Exemple : La fonction partie entière est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

2) Proposition

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I.
Alors la fonction f est continue en a ssi elle est continue à gauche et à droite de a.

3) Limite à droite et à gauche

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ et a un point de I, autre que l'extrémité supérieure de I.
La limite à droite de f en a, notée $\lim_{x\to a, x>a} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)$, est la limite de $f_{I\cap[a;+\infty[}$ en a lorsque cette dernière est définie.

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ et a un point de I, autre que l'extrémité inférieure de I.

La limite à gauche de f en a, notée $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, est la limite de $f_{I\cap]-\infty;a]}$ en a lorsque cette dernière est définie.

Exemple :

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \sin(x)\, si\ x \geq 0 \\ f(x) = sh(x) sinon \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0.

On a : $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x<0} \sin(x) = 0$

Et: $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} sh(x) = 0$

Donc f est continue en 0 !

4) Proposition

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ et a un point de I, alors la fonction f est continue à droite en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) =$ f(a)

De même pour la continuité à gauche…

Remarque

On parle de discontinuité de première espèce, si la fonction admet une limite à gauche et une limite à droite finies, mais de valeurs différentes.

On parle de discontinuité de seconde espèce si au moins l'une des deux limites à gauche ou à droite, n'existe pas ou est infinie.

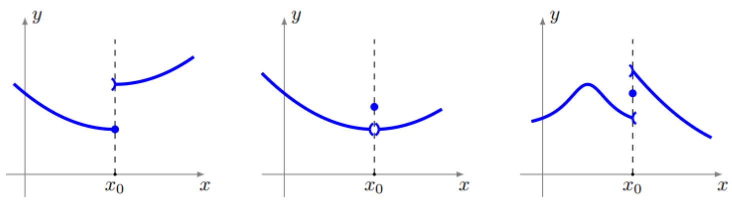

FIGURE 10.2 – Exemples de discontinuités de première espèce

5) Théorème de prolongement par continuité

Soit a∈I, et f :I\{a}→ $\mathbb{R}$ une fonction

Il existe une fonction $\tilde{f}$: I→ $\mathbb{R}$ continue en a prolongeant f sur I si et seulement si f admet une limite finie en a.

Dans ce cas, un tel prolongement est unique et $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

On l'appelle le prolongement par continuité de f en a

Démonstration :

Si un tel prolongement existe, il sera unique par construction et par l'unicité de la limite.

Et $\lim\limits_{x\to a} \widetilde{f(x)} = \lim\limits_{x\to a, x\epsilon I\{a\}} \widetilde{f(x)} = \lim\limits_{x\to a, x\epsilon I\{a\}} f(x) = \tilde{f}(a)$

Montrons que ce prolongement est continu, soit $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Comme $\tilde{f}(a) = L$, : $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

Donc pour tout x de $I\backslash\{a\}$ *vérifiant* $|x-a| \leq \eta$, *on a :* $\left|\widetilde{f(x)} - L\right| \leq \varepsilon$ *et*

$\left|\widetilde{f(x)} - \tilde{f}(a)\right| \leq \varepsilon$

Exemple : soit f définie par : $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, déterminer le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f.

On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc $\tilde{f}$ définie par $\begin{cases} \widetilde{f(0)} = 1 \\ \widetilde{f(x)} = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \end{cases}$ est le prolongement de f par continuité.

6) Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.
On désigne par $C(I, \mathbb{R})$ ou $C^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur I.

7) Opérations sur les fonctions continues

Soit : f et g deux fonctions continues sur I, et α un réel.

Les fonctions f+g et αf sont continues sur I.

Le produit fg est continu sur I.

Si, de plus, f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I.

Soient : I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $f \in C(I, \mathbb{R})$, $g \in C(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$, alors gof est continue sur I.

Démonstration : Evidente avec la caractérisation séquentielle de la continuité.

On peut alors dresser une liste de fonctions usuelles continues :

L'exponentielle, la racine carrée, le logarithme, les polynômes sont continus sur leur domaine de définition

Le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est également continu.

IV. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Le théorème
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles, et a et b deux points de I, alors toutes les valeurs entre f(a) et f(b) sont atteintes par f.

Démonstration
Soit y entre f(a) et f(b), on cherche c entre a et b tel que y=f(c)
On peut supposer que $f(a) \leq y \leq f(b)$
On construit deux suites a_n et b_n telles que : $a_0=a$ et $b_0=b$
Et : $(a_{n+1};b_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) \text{ si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq y \\ \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) \text{ sinon} \end{cases}$
Les suites a_n et b_n sont adjacentes.

En effet : $b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} b_n - \frac{a_n+b_n}{2} \ si\ f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq y \\ \frac{a_n+b_n}{2} - a_n \ sinon \end{cases}$

Et : $b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \frac{b_n-a_n}{2} \ si\ f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq y \\ \frac{b_n-a_n}{2} \ sinon \end{cases}$*, d'où* $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ *et tend vers 0*

De plus : $a_{n+1} - a_n = \begin{cases} \frac{b_n-a_n}{2} \ si\ f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq y \\ 0 \ sinon \end{cases}$*, donc* $a_{n+1} - a_n \geq 0$

De même, on montrerait que $b_{n+1} - b_n \leq 0$

Donc les deux suites convergent, notons c leur limite commune.

On a $f(c) \leq y$ *et* $f(c) \geq y$ *donc* $f(c) = y$

2) Corollaire
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et strictement monotone sur I, à valeurs réelles, et a et b deux points de I, alors toutes les valeurs y entre f(a) et f(b) il existe un unique réel x entre a et b tel que y = f(x).

3) Conséquence fondamentale.
L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

Soit $\alpha = f(a)\ et\ \beta = f(b)\ avec\ \alpha \leq \beta, par\ le\ TVI, [\alpha, \beta] \subset f(I)$
On conclut que f(I) est un intervalle.

Exercice : Soit f : $I \to \mathbb{R}$ continue, telle que $|f|$ est constante, montrer que f est constante.

Supposons que f ne soit pas constante, il existe $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ avec $\alpha \neq \beta$

Si f(a) = -f(b) alors f(a) et f(b) sont de signes contraires et par le TVI, il existe c entre a et b tel que f(c) = 0

Sinon, on a alors |f(a)|≠|f(b)| et |f| non constante.

4) Quelques conséquences immédiates du TVI :
Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, a et b deux points de I, alors si $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe un réel c entre a et b tel que f(c) = 0

Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, si f ne s'annule jamais sur I, alors f est de signe constant sur I.

5) Théorème des bornes atteintes
Soit f : [a ;b]→ $\mathbb{R}$ une fonction continue avec a<b alors f est bornée et atteint ses bornes.

6) Image d'un segment par une fonction continue
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment

Démonstration :
Soit f continue sur [a,b] alors f est bornée et atteint ses bornes, soit m et M les minimum et maximum.
D'après le TVI, f([a,b]) est un intervalle et clairement f([a,b])⊂[m,M]
Et comme m et M sont dans f([a,b]), donc f([a,b]) = [m,M]

7) Théorème de la bijection

Soit f∈C^0(I, ℝ), une fonction continue et strictement monotone alors :
La fonction f définit une bijection de I sur f(I)
Et : f^{-1} est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Démonstration :
Si f est strictement croissante, si x<y, supposons que $f^{-1}(x)>f^{-1}(y)$ alors $f(f^{-1}(x))>f(f^{-1}(x))$, et x>y absurde
Donc f^{-1} a la même monotonie.
De plus $f^{-1}(J)$ est un intervalle, or si $f^{-1}(J)$ est un intervalle alors f^{-1} continue

8) Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle non réduit à un point.
Si f est injective, alors f est strictement monotone.

Démonstration (sous forme d'exercice)
On suppose qu'il existe $(x_1;y_1)\in I^2$ tels que $x_1<y_1$ et $f(x_1)>f(y_1)$ et $(x_2;y_2)\in I^2$ tels que $x_2<y_2$ et $f(x_2)\leq f(y_2)$
On définit la fonction φ de [0,1] dans ℝ par $\varphi(t) = f((1-t)x_1+tx_2) - f((1-t)y_1+ty_2)$
#Montrer que φ s'annule sur]0,1[
#Conclure.

V. Compléments sur les limites

1) Proposition

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ et g : $I \to \mathbb{R}$ deux fonctions
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$

2) Calcul algébrique de limites

Soit f : $I \to \mathbb{R}$ et g : $I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de limites respectives L et L' dans $\overline{\mathbb{R}}$
Lorsque x tend vers a
Alors f+g a pour limite L+L'
Alors si α désigne un réel, αf tend vers αL lorsque x tend vers a
Alors fg tends vers LL' lorsque x tend vers a.

Si f : $I \to \mathbb{R}^*$ a pour limite L lorsque x tend vers a, L∈ ℝ* alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$

Si f : $I \to \mathbb{R}^*$ a pour limite $\pm\infty$ lorsque x tend vers a, L∈ ℝ* alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Si f : $I \to \mathbb{R}^*$ a pour limite 0 , en restant de signe constant strictement positif (resp strictement négative)lorsque x tend vers a, $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty\ (resp -\infty)$

3) Composition de limites

Soient I et J deux intervalles d'intérieur non vide et f : $I \to J$
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ b∈ $\overline{\mathbb{R}}$
Alors b ∈J ou b est une extrémité de J.
De plus si $\lim\limits_{x\to b} g(x) =$ L∈ $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{x\to a} gof(x) =$ L