Réduction des endomorphismes

M. Calciano

Dans ce chapitre, E désigne, sauf mention du contraire, un espace vectoriel de dimension quelconque sur un corps $\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Malgré tout, beaucoup des exercices traités et des théorèmes abordés le seront dans le cadre de la dimension finie.

I. Sous-espaces stables

I.1. Définition

Soit u un endomorphisme de E. Un sous-espace F de E est **stable par** u lorsque $u(F) \subset F$.

On peut alors définir la **restriction** de u à F, appelée endomorphisme induit par u sur F, notée $u_F : F \to F$, $u_F(x) = u(x)$.

Remarque. Si D est une droite stable par u, alors l'endomorphisme induit par u sur D est une homothétie.

Exemple. Pour tout endomorphisme u, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

Exercice : Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v. *(Démonstration : II. 3a)*

I.2. Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension r.

- Si F est stable par u, alors si $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à F, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}),\ D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}).$$

- Réciproquement, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à F dans laquelle la matrice de u est de la forme précédente, alors F est stable par u.

I.3. Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, et $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ une base fixée de E. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale si et seulement si chaque droite vectorielle $\mathbb{K}e_i$ est stable par u.

Exemple. Tout projecteur p et toute symétrie $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ a une matrice diagonale dans une base adaptée à $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

I.4. Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

Démonstration : On écrit $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. *En développant* $\det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *par rapport à la première ligne, on obtient* $\det(D)$. *En développant* $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ *par rapport à la dernière ligne, on obtient* $\det(A)$. □

I.5. Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, et $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_i)_{1 \le i \le n}$ une base fixée de E. La matrice de u est triangulaire supérieure dans la base $\rceil$ si et seulement si chacun des sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, pour $i \in 1, n-1$, est stable par u.

II. Éléments propres

II.1. Éléments propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition. • On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de u s'il existe un vecteur **non nul** $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

- On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ, s'il est non nul et vérifie $u(x) = \lambda x$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u, on appelle **sous-espace propre** associé à λ, noté $E_\lambda(u)$, l'ensemble $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}$.

Remarques. • Un vecteur propre n'est associé qu'à une seule valeur propre.

- $E_\lambda(u)$ est non réduit à $\{0\}$ si et seulement si λ est valeur propre de u.
- **Lien avec le noyau :** u admet 0 comme valeur propre si et seulement si u n'est pas injectif. De plus $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$.
- En dimension finie, l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u, appelé **spectre** de u, se note $\mathrm{Sp}(u)$.

Chercher les éléments propres d'un endomorphisme revient à en déterminer le spectre et les espaces propres correspondants.

II.2. Une question importante : un endomorphisme admet-il toujours une valeur propre ?

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(P) = X \cdot P$. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, l'égalité $XP = \lambda P$ est impossible. Répondre à la question initiale.

II.3. Exemples d'éléments propres pour des endomorphismes remarquables

Homothétie. Tout vecteur non nul est vecteur propre de l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}$ pour la valeur propre λ. Cette homothétie admet λ comme unique valeur propre.

Projecteur. De façon générale, tout sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\mathrm{Im}(u)$.
Démonstration : Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$, alors $x = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathrm{Im}(u)$. Ainsi, si λ est une valeur propre non nulle d'un projecteur p, alors $E_\lambda(p) \subset \mathrm{Im}(p)$. Or la restriction de p à $\mathrm{Im}(p)$ est l'identité, donc $\lambda = 1$. □

Il ne peut donc y avoir que deux valeurs propres possibles : 1 et 0. On vérifie que $E_0(p) = \mathrm{Ker}(p)$ et $E_1(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p)$.

II.4. Propriétés

Proposition (Proposition 1)**. Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont conservés par l'autre.**

Démonstration : Soit λ une valeur propre de u, et $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Montrons que $v(x) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. On a $u(v(x)) = v(u(x))$ car u et v commutent. Or $v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $u(v(x)) - \lambda v(x) = 0$, soit $v(x) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. □

Proposition (Proposition 2)**.** Si F est un sous-espace de E stable par u, alors les valeurs propres de l'endomorphisme induit u_F sont les valeurs propres de u telles que $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$. On a alors : $E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F$.

Remarque. On a ainsi : $\mathrm{Sp}(u_F) \subset \mathrm{Sp}(u)$.

Proposition (Proposition 3)**. Si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille finie de valeurs propres de u, deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_i}(u)$, $i \in I$, sont en somme directe.**

Démonstration : On raisonne par récurrence sur le nombre p de valeurs propres distinctes.

Initialisation : pour $p = 1$, c'est évident.

Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'au rang p. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ valeurs propres deux à deux distinctes. Soit $(x_0, x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_0} \times \cdots \times E_{\lambda_p}$ tel que $x_0 + \cdots + x_p = 0$.

En appliquant u : $\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$.

Par soustraction de λ_0 fois la première équation : $\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i - \lambda_0)x_i = 0$.

Par hypothèse de récurrence appliquée à $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$: $(\lambda_i - \lambda_0)x_i = 0$ pour tout $i \in 1, p$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_0$, on a $x_i = 0$. Puis $x_0 = 0$.

Ainsi $x_0 = x_1 = \cdots = x_p = 0$, et les sous-espaces propres sont en somme directe. □

Corollaire. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Remarque. Le sous-espace propre associé à une valeur propre ne contient pas que des vecteurs propres : le vecteur nul n'est pas un vecteur propre !

II.5. Cas de la dimension finie

Proposition (Proposition 1)**.** Si E est de dimension finie et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u, deux à deux distinctes, alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(u)\big) \leq \dim(E).$$

Démonstration : Évident puisque les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe. □

Proposition (Proposition 2)**.** Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n a au plus n éléments.

Démonstration : Une famille libre maximale est de taille au plus n. Or toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre, donc de rang inférieur à n. □

II.6. Éléments propres d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de A s'il existe $X \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
- On dit que $X \in \mathbb{K}^n$ est un **vecteur propre** de A associé à λ s'il est non nul et vérifie $AX = \lambda X$.
- Si λ est valeur propre de A, le **sous-espace propre** associé est $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{K}^n,\ AX = \lambda X\}$.

Remarques. • Le scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A admet au plus n valeurs propres.

Exemple. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Montrer que les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux.

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice $A - \lambda I_n$ est triangulaire avec diagonale $(a_{11} - \lambda, \dots, a_{nn} - \lambda)$, dont le déterminant est $(a_{11} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$. Celui-ci est nul si et seulement si $\lambda \in \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.
□

Proposition. Soit A une matrice représentant un endomorphisme u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On a $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E_\lambda(u) \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A).$$

Remarque. On a $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$ mais $E_\lambda(u) \neq E_\lambda(A)$, en effet $E_\lambda(u) \subset E$ et $E_\lambda(A) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Corollaire. Deux matrices semblables ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

Démonstration : En réalité, deux matrices semblables représentent le même endomorphisme. □

Exemple (Étude d'un exemple)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A)$ et $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$.

On calcule $\det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + 1$, donc $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A) = \{i, -i\}$.

III. Polynôme caractéristique

III.1. Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition. Il existe un unique polynôme, appelé **polynôme caractéristique** de A, noté χ_A, tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Remarque. Si A est une matrice réelle, son polynôme caractéristique est identique, que l'on voie A comme matrice réelle ou complexe.

Proposition. On a : $\chi_A = \chi_{A^T}$.

Démonstration : Il suffit de remarquer qu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant. □

Proposition (Développement partiel — petit théorème de Cayley-Hamilton).

$$\chi_A = X^n - (\mathrm{tr}\, A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Corollaire : Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\chi_A = X^2 - (\mathrm{tr}\, A)X + \det(A)$.

Démonstration : Par récurrence sur n, avec la convention qu'un déterminant de taille nulle vaut 1. □

Application (Oral PC ENS 2024). Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 + A = J$. *(Indication : procéder en analyse-synthèse. On utilisera $\chi_A = X^2 - (\mathrm{tr}\, A)X + \det(A)$ et on admettra le grand théorème de Cayley-Hamilton permettant d'affirmer que $\chi_A(A) = 0$.)*

Proposition. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Démonstration : $\chi_{P^{-1}AP}(X) = \det(XI_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(XI_n - A) \det(P) = \det(XI_n - A)$. □

Exemple (Exemple de calcul)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

III.2. Polynôme caractéristique et spectre

Proposition. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique de A.

Exemple. Avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, déterminer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et les éléments propres sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Nous avons vu qu'en dimension quelconque un endomorphisme n'a pas forcément de valeur propre, et qu'en dimension finie n il en a au plus n distinctes.

- **Sur $\mathbb{C}$:** tout endomorphisme d'un espace de dimension finie possède *au moins* une valeur propre (théorème de d'Alembert-Gauss).
- **Sur $\mathbb{R}$, n impair :** un endomorphisme possède au moins une valeur propre (théorème des valeurs intermédiaires).

III.3. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On suppose E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition. On appelle **polynôme caractéristique de** u l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u).$$

Remarque. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme correspond à celui de sa matrice dans n'importe quelle base. La notion n'a aucun sens si E n'est pas de dimension finie.

Proposition. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement s'il est racine de χ_u.

Démonstration : Par définition, λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = 0$. □

III.4. Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition. On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre λ de u, son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de u. On le note $m(\lambda)$. On parle de valeur propre simple, double, triple, etc.

Proposition. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a :

$$1 \leq \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq m(\lambda).$$

Corollaire : Si λ est valeur propre simple de u, alors $\dim(E_\lambda(u)) = 1$.

Démonstration : Posons $n(\lambda) = \dim(E_\lambda(u))$. Comme $E_\lambda(u) \neq \{0\}$, on a $1 \leq n(\lambda)$. De plus, $E_\lambda(u)$ est stable par u, donc la restriction de u à $E_\lambda(u)$ est l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}$, de polynôme caractéristique $(X - \lambda)^{n(\lambda)}$, qui divise χ_u. Donc $n(\lambda) \leq m(\lambda)$. □

Remarque. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres distinctes de u, alors :

$$\chi_u = Q \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m(\lambda_i)},$$

où $Q \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.

Exercice :

1. Montrer que si une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une seule valeur propre λ, alors $M - \lambda I_n$ est nilpotente.
2. Montrer que toute matrice triangulaire stricte (autrement dit triangulaire de diagonale nulle) est nilpotente.

IV. Diagonalisation

Dans ce paragraphe, E est de dimension finie.

Définition. L'endomorphisme u est dit **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de u est diagonale.

Une matrice A est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Proposition. Soit u un endomorphisme de E et A une matrice représentant u. Alors u est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Terminologie et exemple. Diagonaliser u (ou A), c'est déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale (ou une matrice semblable à A et diagonale).

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice représentative de A est diagonale.

IV.1. Premières conditions de diagonalisabilité

Proposition. Si E est de dimension n et si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable (et chaque sous-espace propre est de dimension 1).

Remarque. Il ne s'agit que d'une condition *suffisante* et non nécessaire.

Exemple. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exemple. Montrer que $B = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Ce raisonnement est très commode pour démontrer qu'un endomorphisme ne possédant qu'une seule valeur propre n'est pas diagonalisable.

Proposition.

$$u \text{ diagonalisable} \iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E).$$

$$A \text{ diagonalisable} \iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathbb{K}^n \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable.

IV.2. Diagonalisation et polynôme caractéristique

Proposition. https://youtu.be/5kFvl-nhXjk

Si le polynôme caractéristique de u (resp. A) est scindé à racines simples, alors u (resp. A) est diagonalisable.

Remarque. Il s'agit d'une condition suffisante.

Démonstration : Supposons que u admette n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour chaque $i \in 1, n$, il existe $e_i \in E_{\lambda_i}$. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes) et donc forme une base de E. Or les espaces propres sont en somme directe, donc :

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) \leq \dim(E) = n.$$

Donc pour tout i, E_{λ_i} est une droite vectorielle. □

Proposition (Critère de diagonalisabilité). L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

C1 : Le polynôme caractéristique de u est **scindé** sur $\mathbb{K}$.

C2 : Pour toute valeur propre de u, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité :
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad \dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda).$$

Remarques. • Le résultat reste valide pour les matrices.

- **Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé, l'endomorphisme n'est pas diagonalisable.**
- **Théorème admis dans ce cours (trigonalisabilité) :** tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable, c'est-à-dire sa matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Démonstration : Soit $\chi_u = Q \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ avec Q sans racine sur $\mathbb{K}$. On a :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda) = \dim(E) - \deg(Q).$$

Or u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E)$, ce qui est équivalent à $\deg(Q) = 0$ et $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$ pour tout λ. □

V. Applications

V.1. Calcul de puissances

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A.

b) Construire la matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.

c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Le polynôme caractéristique est $(X-1)(X-2)(X+4)$. Il reste à écrire $A = PDP^{-1}$, puis $A^n = PD^nP^{-1}$. □

V.2. Résolution de systèmes ou de suites récurrentes

Déterminer les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n + 5w_n \end{cases}$$

Démonstration : *La matrice associée au système a pour polynôme caractéristique $x(x-2)(x-1)$. Les vecteurs propres sont $(-4,3,2)$, $(-4,0,1)$ et $(2,1,0)$. On construit la matrice de passage P.* $\square$

V.3. Résolution de systèmes d'équations différentielles

Exemple n°1. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Démonstration : *Le polynôme caractéristique est $(x-2)(x-3)$. Des vecteurs propres possibles : $(1,1)$ et $(2,1)$. On construit la matrice de passage P.* $\square$

Exemple n°2. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

Démonstration : *Le polynôme caractéristique est $(x-5)(x+3)$. Des vecteurs propres possibles : $(2,1)$ et $(-2,1)$. On construit la matrice de passage P.* $\square$

VI. Exercices

Exercice n°1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs telle que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A, associée par exemple au vecteur propre X dont chaque coordonnée est 1.

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.
Il pourra être judicieux d'évaluer $AX = \lambda X$ avec $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et d'exploiter la ligne i_0 correspondant à $|x_{i_0}| = \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Exercice n°2

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *pseudo-magique* s'il existe un réel $S(A)$ tel que : $\forall i, j \in 1, n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = S(A)$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a) Vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

b) Montrer que A est pseudo-magique si et seulement s'il existe un réel μ tel que $AJ = JA = \mu J$.

c) Soit $A \in \mathcal{E}$ inversible. Montrer que $S(A) \neq 0$ et que $A^{-1} \in \mathcal{E}$. Que vaut $S(A^{-1})$?

d) Soit $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $S(A)$ est valeur propre de A.

Exercice n°3 (oral de concours)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{rg}(A) = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$, et que ce scalaire est valeur propre de A.

Exercice n°4 (oral de concours)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On veut montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

a) Établir l'égalité quand $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

b) Pour $A \notin GL_n(\mathbb{C})$, justifier que pour $t \neq 0$ suffisamment petit, $A + tI_n \in GL_n(\mathbb{C})$, et en déduire l'égalité en général.

Exercice n°5

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et la diagonaliser.

Exercice n°6

Diagonaliser $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice n°7 (les deux questions sont indépendantes)

a) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres complexes (distinctes ou non). Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, a_{j,i}.$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les produits par blocs :
$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & -xI_p \end{pmatrix},$$
comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA.

Exercice n°8

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit un vecteur propre. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice n°9 https://youtu.be/RpKMeILyHis

a) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ est équivalent à f surjectif.

b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E, $a \in \mathrm{GL}(E)$ et $v = a \circ u \circ a^{-1}$. Comparer $\mathrm{Sp}(u)$ et $\mathrm{Sp}(v)$ d'une part, et $a(E_\lambda(u))$ et $E_\lambda(v)$ d'autre part.

Exercice n°10

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel non nul. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.

Exercice n°11

Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Établir que $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$.

Exercice n°12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible de polynôme caractéristique χ_A.

a) Exprimer $\det(A)$ en fonction de $\chi_A(0)$.

b) Déterminer, pour $x \neq 0$, $\chi_{A^{-1}}(x)$ en fonction de χ_A, $\chi_A(0)$ et x^n.

Exercice n°13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice n°14

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u et v commutent. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice n°15 https://youtu.be/G-d5aiZbp4o

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = {}^tM$.

a) Montrer que φ est diagonalisable.

b) Préciser les espaces propres de φ.

c) Calculer la trace et le déterminant de φ.

Exercice n°16 (oraux de concours) Soit l'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - XP''$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver la seule valeur propre possible λ de u.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? inversible ?
4. Calculer le sous-espace propre associé à λ.

Exercice n°17

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

a) Justifier que tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.

b) Observer que l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}[X]$ défini par $P(X) \mapsto (X-1)P(X)$ n'a pas de valeur propre.

Exercice n°18 (oral de concours) https://youtu.be/lPh-a9sEb9o

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres.
3. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$ en utilisant la question 1.

Exercice n°19

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible et calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°20 https://youtu.be/hpbagnXYCLI

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice n°21 **(oraux Écricome)** https://youtu.be/JJy0n7EuHOE

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les valeurs propres de A.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
2. En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n sous forme de tableau matriciel.
4. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.
   (b) En déduire l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice n°22

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tels que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $AX = XB \iff X = 0_n$.
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = AX - XB$.

Exercice n°23

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

1. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commute avec A, alors A et B sont diagonalisables via la même matrice de passage.
2. On veut résoudre $X^2 = A$.
   a) Montrer que les solutions commutent avec A.
   b) En déduire les solutions, exprimées en fonction des valeurs propres de A.
   c) Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.