

# Chapitre 2 : Intégrales dites généralisées

M. Calciano

## I. Généralités

On s'intéresse ici à un intervalle  $I$  du type  $[a, b[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  et  $a < b$ .

### I.1. Définition

Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b[, \mathbb{K})$ .

**Définition I.1.** On dit que l'intégrale  $\int_{[a, b[} f$  **converge** si la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  admet une limite finie en  $b$ .

Dans ce cas, on note  $\int_{[a, b[} f$  ou  $\int_{[a, b[} f(t) dt$  cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que  $\int_{[a, b[} f$  **diverge**.

**Notation I.1.** L'intégrale  $\int_{[a, b[} f$  est appelée **intégrale généralisée** ou **intégrale impropre**. Le caractère convergent ou divergent d'une telle intégrale correspond à sa « nature ».

### I.2. Premières propriétés

#### a) Caractère « local » de la nature d'une intégrale

**Proposition I.1.** Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b[, \mathbb{K})$ , et  $c \in [a, b[$ . Alors  $\int_{[a, b[} f$  et  $\int_{[c, b[} f$  sont de même nature. De plus, si elles convergent, on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*Démonstration :* En utilisant la relation de Chasles :  $\forall x \in [a, b[$ ,

$$\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f.$$

Les fonctions  $x \mapsto \int_a^x f$  et  $x \mapsto \int_c^x f$  diffèrent d'une constante près. Elles sont donc de même nature. □

**Proposition I.2.** 1. Si  $f \in \mathcal{C}_M([a, b[, \mathbb{K})$  et si  $\int_a^b f$  converge, alors  $\int_x^b f \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow b$ .

2. Si  $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ , alors  $\int_a^b f$  converge et  $\int_{[a, b[} f = \int_{[a, b]} f$ .

#### b) Notation

On notera le plus souvent  $\int_a^b f$  l'intégrale  $\int_{[a, b[} f$  (la propriété précédente assurant la cohérence de la notation avec celle vue en première année pour  $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ ).

### I.3. Proposition — Calcul via une primitive

**Proposition I.3.** Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b[, \mathbb{K})$  et  $F$  une primitive de  $f$ . Alors :

$$\int_a^b f \text{ converge} \iff F \text{ possède une limite finie en } b.$$

De plus :  $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a)$ .

*Démonstration :* Pour tout  $x \in [a, b[$ ,  $\int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$ . La conclusion est immédiate.  $\square$

### I.4. Premiers exemples

**Exemple I.1.** Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge et calculer sa valeur.

Pour  $x > 0$  :

$$\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ . Donc l'intégrale converge et vaut **1**.

**Exemple I.2.** Montrer que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$  converge et calculer sa valeur.

On décompose en éléments simples :  $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} + \frac{-t}{1+t^2}$  (avec  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $c = 0$  par calcul direct).

Donc :

$$\int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)} = \left[ \ln t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_1^x = \ln \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = 0$ , l'intégrale converge et vaut  $\frac{1}{2} \ln 2$ .

### I.5. Remarques importantes

**Remarque I.1.** À l'instar des séries, la condition  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  n'est **pas suffisante** pour que  $\int_a^{+\infty} f$  converge.

En effet, la fonction  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  vérifie  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ , et pourtant  $\int_1^{+\infty} f$  diverge.

Et « pire encore » : la convergence de  $\int_a^{+\infty} f$  n'entraîne pas que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Par exemple, si on définit  $f$  sur  $[1, +\infty[$  par un motif en triangle sur  $\left[ n - \frac{1}{2n^2}; n + \frac{1}{2n^2} \right]$  avec sommet d'ordonnée 1 en  $t = n$ , alors son intégrale est convergente (de l'ordre de  $\frac{1}{n^2}$ ) mais  $f$  n'a pas de limite nulle en  $+\infty$ .

## I.6. Méthode pour démontrer la divergence d'une intégrale

Pour  $a > 0$ , par la relation de Chasles :

$$\sum_{n=1}^N \int_{na}^{(n+1)a} f = \int_a^{(N+1)a} f.$$

**Proposition I.4.** Si l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge, la série de terme général  $u_n = \int_{na}^{(n+1)a} f$  converge. Par contraposée, si cette série diverge, alors l'intégrale diverge.

### Exercice n°1

1. En étudiant la série de terme général  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ , montrer que l'intégrale  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  diverge.
2. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \cos t dt$  diverge, mais que la série de terme général  $\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \cos t dt$  est convergente. Que prouve ce résultat par rapport à la méthode précédente ?

## II. Extensions aux cas $]a, b]$ et $]a, b[$

### II.1. Cas $]a, b]$

La définition précédente s'adapte sans difficulté.

**Définition II.1.** Soit  $f \in \mathcal{C}_M(]a, b], \mathbb{K})$ . On dit que  $\int_{]a, b]} f$  **converge** si la fonction  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  admet une limite finie en  $a$ .

Dans ce cas, on note  $\int_{]a, b]} f$ , ou  $\int_a^b f$ , cette limite. Dans le cas contraire, on dit que  $\int_{]a, b]} f$  **diverge**.

### II.2. Cas $]a, b[$

**Définition II.2.** Soit  $f \in \mathcal{C}_M(]a, b[, \mathbb{K})$ . On dit que  $\int_{]a, b[} f$  **converge** s'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

- $x \mapsto \int_x^c f(t) dt$  admet une limite finie en  $a$ ,
- $x \mapsto \int_c^x f(t) dt$  admet une limite finie en  $b$ .

Dans ce cas, on note  $\int_{]a, b[} f$  ou  $\int_a^b f$  cette limite. Dans le cas contraire,  $\int_{]a, b[} f$  **diverge**.

**Exemple II.1.** Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  converge et calculer sa valeur.

Pour  $x > 0$  :  $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ .

Donc  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  converge. Par parité,  $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$  converge également et vaut  $\frac{\pi}{2}$ .

Ainsi  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  converge et vaut  $\pi$ .

### III. Fonctions à valeurs réelles positives et intégrales de référence

Comme pour les séries numériques, on étudie plus particulièrement le cas des fonctions réelles positives, d'autant plus qu'en fin de chapitre on abordera la notion d'*intégrabilité* qui s'y ramènera.

#### III.1. Proposition — Critère de majoration

**Proposition III.1.** Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b[, \mathbb{R})$  à valeurs positives.

- L'intégrale  $\int_a^b f$  converge si et seulement si la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est majorée sur  $[a, b[$ .
- L'intégrale  $\int_a^b f$  diverge si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = +\infty$ .

**Exemple III.1.** Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  est divergente.

#### III.2. Comparaison

**Proposition III.2.** Soit  $(f, g) \in \mathcal{C}_M([a, b[, \mathbb{R})^2$  vérifiant  $0 \leq f \leq g$ .

Si  $\int_a^b g$  converge, alors  $\int_a^b f$  converge.

*Démonstration :* Pour  $x \in [a, b[$ , on pose  $F(x) = \int_a^x f$  et  $G(x) = \int_a^x g$ . Par croissance de l'intégrale et du fait que  $0 \leq f \leq g$ , on a sur  $[a, b[$  :  $0 \leq F(x) \leq G(x)$ .

Comme  $\int_a^b g$  converge,  $G$  est majorée, donc  $F$  l'est aussi et admet une limite finie en  $b$ .

Ainsi  $\int_a^b f$  converge. □

#### III.3. Intégrales de référence

**Théorème III.1** (Intégrales exponentielles). Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$  converge si et seulement si  $\alpha > 0$ .

*Démonstration :* La fonction  $t \mapsto e^{-\alpha t}$  est continue et positive.

**1<sup>er</sup> cas :**  $\alpha = 0$ . Alors  $\int_0^x 1 dt = x \rightarrow +\infty$ , donc l'intégrale diverge.

**2<sup>e</sup> cas :**  $\alpha \neq 0$ . On a  $\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$  □

**Théorème III.2** (Intégrales de Riemann). Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

*Démonstration : Même type de raisonnement que précédemment (calcul direct selon les cas  $\alpha = 1$  et  $\alpha \neq 1$ ).* □

## IV. Propriétés

Les propositions suivantes généralisent aux intégrales généralisées les propriétés déjà établies en première année.

### IV.1. Premières propriétés

**Proposition IV.1.** 1. Soit  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$  telle que  $\int_I f$  converge. Alors  $f \mapsto \int_I f$  est linéaire.

2. Si  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{C})$ , alors  $\int_I f$  converge si et seulement si  $\int_I \operatorname{Re}(f)$  converge et  $\int_I \operatorname{Im}(f)$  converge. On a alors  $\int_I f = \int_I \operatorname{Re}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(f)$ .

3. Soit  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$  telle que  $\int_I f$  converge et  $f \geq 0$ . Alors  $\int_I f \geq 0$ .

### IV.2. Proposition importante

**Proposition IV.2.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et positive. Si  $\int_I f = 0$ , alors  $f$  est la fonction nulle.

*Démonstration : Comme  $f$  est continue sur  $I$ , elle admet des primitives sur  $I$  ; soit  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .  $F$  est dérivable sur  $I$  de dérivée  $f(x)$ .*

*Or  $F$  est constante égale à 0, donc sa dérivée est nulle, ainsi  $f = 0$ .* □

### IV.3. Remarques

**Remarque IV.1.** 1. Soit  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$  telle que  $\int_I f$  converge. Si  $J$  est un sous-intervalle de  $I$  d'intérieur non vide, alors  $\int_J f$  converge.

2. Soit  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$  telle que  $\int_I f$  converge. Alors la relation de Chasles reste valide pour tous  $x, y, z \in I$ .

## V. Intégrabilité

$I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

### V.1. Définition

**Définition V.1.** On dit que  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$  est **intégrable** sur  $I$ , ou que l'intégrale  $\int_I f$  **converge absolument**, si l'intégrale  $\int_I |f|$  converge.

On note  $L^1(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions intégrables sur  $I$ .

### V.2. Structure vectorielle

**Proposition V.1.** L'ensemble  $L^1(I, \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$ .

### V.3. Théorème — Inégalité triangulaire

**Théorème V.1.** Pour tout  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ , on a :

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

*Démonstration :* On a  $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ . Par conservation de l'ordre et par linéarité :

$$-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|,$$

d'où  $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$  □

### V.4. Théorème — Intégrabilité implique convergence

**Théorème V.2.** Si  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ , alors  $\int_I f$  converge.

*Démonstration :* Utiliser l'inégalité triangulaire. □

### V.5. Caractère local de l'intégrabilité

**Proposition V.2.** Soit  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ . Pour tout  $c \in [a, b]$ ,  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si elle l'est sur  $[c, b]$ .

### V.6. Théorèmes de comparaison

**Théorème V.3.** Soit  $a < b$  et  $(f, g) \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})^2$ .

- Si  $f = O_b(g)$  et si  $g$  est intégrable sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- Si  $f \sim_b g$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $g$  l'est.

**Exemple V.1.** Soit  $x > 0$ , montrer que  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  converge.

**1<sup>er</sup> cas :**  $x \geq 1$ .

La fonction  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus  $t^2 \cdot t^{x-1} e^{-t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , donc  $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , intégrable en  $+\infty$  par comparaison avec une intégrale de Riemann.

**2<sup>e</sup> cas** :  $x < 1$ .

L'argument en  $+\infty$  reste valable. En 0 :  $t^{x-1}e^{-t} \sim_0 t^{x-1}$ , qui est intégrable en 0 par comparaison avec une intégrale de Riemann (car  $x - 1 > -1$  équivaut à  $x > 0$ ).

Ainsi, dans les deux cas,  $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$  converge.

**Remarque 11.16 – On compare les INTÉGRABILITÉS!** Ces critères ne permettent pas de conclure directement sur la convergence **basique** des intégrales concernées, mais sur leurs convergences absolues, autrement dit sur les **intégrabilités** des fonctions en question !

$$f(t) \sim g(t), \text{ or } \int_a^b g \text{ converge (resp. diverge),}$$

$$\text{donc } \int_a^b f \text{ converge (resp. diverge).}$$

Un contre-exemple : bien que

$$\ln \left( 1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right) \sim \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}},$$

l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right) dx$$

diverge, tandis que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$$

converge.

## VI. Méthodes de calculs effectifs

### VI.1. Intégration par parties

**Définition VI.1** (Convention des crochets). Pour  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $h$  continue sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ , le crochet  $[h]_a^b$  converge si et seulement si  $h$  possède des limites finies en  $a$  et en  $b$ .

**Théorème VI.1** (Intégration par parties généralisée). Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$  avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

Si le crochet  $[fg]_a^b$  converge, alors les intégrales  $\int_a^b f'g$  et  $\int_a^b fg'$  sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

**Exemple VI.1.** Calculer  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ .

On pose  $u = \arctan t$  et  $v' = \frac{1}{t^2}$ , donc  $v = -\frac{1}{t}$ . Ces fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$ .

$$I(x) = \left[ -\frac{\arctan t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt = -\frac{\arctan x}{x} + \frac{\pi}{4} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt.$$

On a  $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ , d'où :

$$I(x) = -\frac{\arctan x}{x} + \frac{\pi}{4} + \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln 2.$$

En passant à la limite quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

## VI.2. Changement de variables

**Théorème VI.2.** Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{K})$  et  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , bijective et **strictement croissante**. Alors les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$  sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Si  $\varphi$  est **strictement décroissante**, le résultat reste valable avec un signe  $-$  au second membre. En résumé, dans les deux cas :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du.$$

**Remarque VI.1.** L'hypothèse de convergence est indispensable. Ainsi, le changement de variable  $u = -t$  montre que  $\int_{-2}^0 t^2 \cdot (-t) dt$  et  $\int_0^2 t^2 \cdot (-t) dt$  sont de même nature (convergentes), et on peut écrire  $\int_{-2}^2 t^2 \cdot (-t) dt$ .

En revanche,  $\int_0^{+\infty} t dt$  et  $\int_{-\infty}^0 t dt$  sont de même nature mais **divergentes** : on ne peut pas écrire  $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt = \int_0^{+\infty} t dt + \int_{-\infty}^0 t dt$ .

**Exemple VI.2.** Montrer que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ .

On pose  $u = t^2$ , qui est de classe  $\mathcal{C}^1$ , bijective et strictement croissante de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, +\infty[$ , et  $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ . D'où :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

**Exemple VI.3.** Montrer la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$  et calculer sa valeur.

**Première méthode — sans intégrabilité.**

Soit  $x > 0$ , on pose  $I(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ . On effectue le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$ , bijectif de  $]0, +\infty[$  sur  $]0, +\infty[$ , et on obtient  $I(x) = -I(x)$ , d'où  $I(x) = 0$  pour tout  $x > 0$ . Ainsi  $I = 0$  et l'intégrale converge.

**Deuxième méthode — via intégrabilité.**

La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

- En  $0^+$  :  $t \cdot \frac{\ln t}{(1+t)^2} \rightarrow 0$ , donc  $\frac{\ln t}{(1+t)^2} = o\left(\frac{1}{t}\right)$ , intégrable par comparaison (Riemann, exposant  $< 1$ ).
- En  $+\infty$  :  $t^{3/2} \frac{\ln t}{(1+t)^2} \rightarrow 0$ , donc  $\frac{\ln t}{(1+t)^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ , intégrable par comparaison (Riemann, exposant  $> 1$ ).

Donc  $t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , et la valeur de l'intégrale est 0 (voir première méthode).

## VII. Intégrales semi-convergentes

### VII.1. Définition

**Définition VII.1.** Si  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{C})$  n'est pas intégrable mais si  $\int_I f$  converge, on dit que  $\int_I f$  est **semi-convergente**.

### VII.2. Méthode d'étude

**Remarque VII.1.** L'étude des intégrales semi-convergentes ne peut se faire entièrement avec les théorèmes de comparaison (qui reposent sur des intégrales absolument convergentes), ni par changement de variable (qui ne fait pas apparaître en général des fonctions intégrables). **L'outil principal est l'intégration par parties.**

**Exemple VII.1.** Soit  $\alpha \in ]0, 1]$ , étudier la convergence de  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ .

On pose  $u = \frac{1}{t^\alpha}$  et  $v' = e^{it}$ , d'où  $v = \frac{e^{it}}{i}$ . Ces fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$ .  
Pour  $x > 0$  :

$$I(x) = \int_1^x \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{e^{it}}{it^\alpha} \right]_1^x + \frac{\alpha}{i} \int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Or  $\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (car  $\alpha + 1 > 1$ ), donc  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt$  converge. Le crochet admet également une limite, donc  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$  **converge**.

Elle n'est cependant pas absolument convergente (à vérifier par encadrement de  $|e^{it}/t^\alpha|$ ).

## Exercices

### Exercice n°0

Résumer sur un schéma les liens entre « fonction intégrable » et « intégrale convergente ».

Quelle est la grande méthode à employer pour démontrer la convergence d'une intégrale pour une fonction non intégrable ?

**Exercice n°1**

Soit  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2} dt$  où  $a$  désigne un réel strictement positif.

1. Montrer que  $I$  est une intégrale convergente.
2. À l'aide du changement de variable  $t = a^2x$ , trouver une relation vérifiée par  $I$ , et déterminer  $I$ .

**Exercice n°2**

Soient  $a = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et  $b = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ .

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que ces deux intégrales généralisées sont de même nature.
2. Établir la convergence de l'une d'entre elles, puis une relation entre  $a$  et  $b$ .
3. Montrer que  $a = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$ .

**Exercice n°3**

1. Montrer que l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.
2. Montrer que pour tout réel  $t > 0$ ,  $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ .
3. Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$  converge.
4. Montrer que  $I$  n'est pas absolument convergente.
5. La fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est-elle intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  ?

**Exercice n°4**

1. Montrer que la fonction  $f(x) = \left(2i - \frac{1}{x^2}\right) e^{ix^2}$  n'est pas intégrable sur  $[\pi, +\infty[$ .
2. Montrer que  $\int_{\pi}^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{x^2}\right) e^{ix^2} dx$  est convergente.

**Exercice n°5**

Montrer que l'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$  est convergente et préciser sa valeur.

**Exercice n°6**

Soit  $f(x) = \ln(\sin x)$  et  $g(x) = \ln(\cos x)$ .

1. Montrer que  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .
2. On pose  $I = \int_0^{\pi/2} f$  et  $J = \int_0^{\pi/2} g$ . En considérant  $I + J$ , calculer  $I$  et  $J$ .

**Exercice n°7**

Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2+t} dt$  converge.

**Exercice n°8**

On considère les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

1. Justifier l'existence de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .
2. Calculer  $I_1$  et  $I_2$ .
3. Calculer  $I_3$  à l'aide du changement de variable  $u \mapsto \sin u$ .

**Exercice n°9**

[oraux de concours] Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2} dx$ .

**Exercice n°10**

[oraux de concours]

1. Calculer  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$  à l'aide du changement de variable  $u = \sqrt{t^2+1}$ .
2. Montrer avec les règles de Riemann que

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$

converge.

3. Calculer  $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$ .

**Exercice n°11**

[oral CCINP-PSI 2024] Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt$ .

1. Montrer que  $I_n$  est bien définie.

2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

3. Montrer que  $I_n \sim \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$  (penser à un changement de variables et au théorème de convergence dominée).

4. *Pour ceux qui maîtrisent les séries entières* : sachant que  $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$ , que si  $\sum f_n < +\infty$  alors  $\int \sum f_n = \sum \int f_n$ , et que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , montrer que  $I_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$ .

**Exercice n°12**

[oraux de concours] Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2} dx$ .

**Exercice n°13**

[écrits de concours — Étude de la fonction  $\Gamma$ ] On rappelle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ .

1. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  est convergente, et calculer sa valeur.
2.
  - a) Déterminer, pour tout réel  $x$ , la valeur de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t}$ .
  - b) En déduire la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ , pour tout réel  $x$ .
  - c) Déterminer les valeurs du réel  $x$  pour lesquelles l'intégrale  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$  est convergente.
  - d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est définie sur  $]0, +\infty[$ .

3.
  - a) Calculer  $\Gamma(1)$ .
  - b) Établir une relation entre  $\Gamma(x)$  et  $\Gamma(x+1)$ , pour tout réel strictement positif  $x$ .  
En déduire la valeur de  $\Gamma(n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - c) Démontrer :  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ .  
En déduire :  $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ .