

Chapitre 3 : Calcul différentiel (1)

M. Calciano

Ce chapitre pose les bases analytiques nécessaires à l'étude des fonctions de plusieurs variables réelles. On commence par les notions topologiques indispensables (normes, ouverts, continuité), avant d'aborder les dérivées partielles, la différentiabilité et les premiers résultats sur les extrema.

I. Topologie des espaces vectoriels normés

a) Normes

Définition I.1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On appelle **norme** sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- (i) **Séparation** : $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$;
- (ii) **Homogénéité** : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
- (iii) **Inégalité triangulaire** : $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé** (EVN).

Exemples fondamentaux sur \mathbb{R}^n . Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Ces trois applications sont des normes sur \mathbb{R}^n (vérification laissée en exercice).

Exemple à traiter. Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$ définit une norme sur \mathbb{R}^2 .

Seule l'inégalité triangulaire mérite attention : $N(u+v) = \max(|x+x'|, |y+y'|) \leq \max(|x|+|x'|, |y|+|y'|) \leq N(u) + N(v)$.

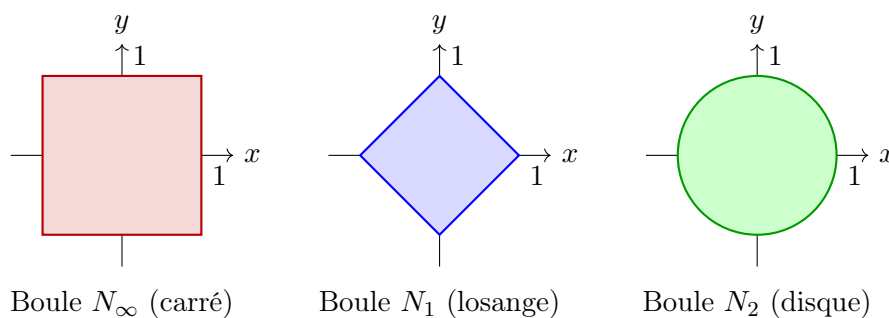


FIGURE 1 – Boules unitaires des trois normes usuelles sur \mathbb{R}^2 .

b) Distance associée, boules et sphères

Définition I.2. Soit (E, N) un EVN. On appelle **distance associée** l'application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, (x, y) \mapsto N(x - y)$.

Pour $a \in E$ et $r > 0$, on définit :

- **boule ouverte** : $B(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) < r\}$;
- **boule fermée** : $B_f(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) \leq r\}$;

- **sphère** : $S(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) = r\}$.
- **distance d'un point à une partie** : pour $A \subset E$ non vide, $d(x, A) = \inf\{N(x - y) \mid y \in A\}$.

Remarque : La définition de $d(x, A)$ est légitime car l'ensemble $\{N(x - y) \mid y \in A\}$ est une partie non vide de \mathbb{R}^+ , donc minorée par 0 : son infimum existe bien dans \mathbb{R}^+ .

c) Normes équivalentes

Définition I.3. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites **équivalentes** s'il existe des constantes $c, C > 0$ telles que $\forall x \in E : c N_2(x) \leq N_1(x) \leq C N_2(x)$.

De manière équivalente, les fonctions N_1/N_2 et N_2/N_1 sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

Exemple. Sur \mathbb{R}^2 , on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : N_\infty(x, y) \leq N_2(x, y) \leq \sqrt{2} N_\infty(x, y)$. Les normes N_∞ et N_2 sont donc équivalentes.

Théorème I.1 (Équivalence des normes en dimension finie, admis). *Soit E un \mathbb{R} - (ou \mathbb{C} -)espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes. En particulier, ceci s'applique sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .*

Remarque : Ce théorème est remarquable et propre à la dimension finie : en dimension infinie, deux normes peuvent ne pas être équivalentes. Sa conséquence pratique est que toutes les notions topologiques qui suivent (limite, continuité, ouvert...) ne dépendent pas du choix de la norme sur \mathbb{R}^n .

d) Voisinages, ouverts et fermés

Définition I.4. Soit (E, N) un EVN et $a \in E$.

- Une partie $V \subset E$ est un **voisinage** de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .
- Une partie $U \subset E$ est un **ouvert** de E si elle est voisinage de chacun de ses points : $\forall x \in U, \exists r_x > 0, B(x, r_x) \subset U$.
- Une partie $F \subset E$ est un **fermé** de E si $E \setminus F$ est un ouvert.

Exemples.

- E et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés.
- Toute boule ouverte $B(a, r)$ est un ouvert ; toute boule fermée $B_f(a, r)$ est un fermé.
- $[0, 1]$ est un fermé de \mathbb{R} , mais $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Théorème I.2 (Stabilité des ouverts et fermés). *Soient U_1, U_2 deux ouverts (resp. deux fermés) d'un EVN E . Alors :*

- $U_1 \cap U_2$ et $U_1 \cup U_2$ sont des ouverts (resp. des fermés) ;
- toute union quelconque d'ouverts est un ouvert (mais une intersection infinie d'ouverts peut ne pas l'être) ;
- toute intersection finie de fermés est un fermé.

Démonstration (intersection de deux ouverts) : Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Puisque U_1 est ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset U_1$. De même, il existe $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_2) \subset U_2$. Alors $B(x, \min(r_1, r_2)) \subset U_1 \cap U_2$, ce qui montre que $U_1 \cap U_2$ est bien un ouvert. Les autres points se montrent de manière analogue. \square

Remarque : L'intersection d'une famille infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte : $\bigcap_{n \geq 1}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$, qui est fermé.

II. Limites et continuité

Dans toute la suite, U désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 (les définitions s'adaptent à $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$), et les normes utilisées sont indifférentes grâce au théorème d'équivalence. On travaille avec la norme N_∞ pour la commodité des calculs.

a) Limite d'une fonction

Définition II.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, et $L \in \mathbb{R}$. On dit que f admet L pour **limite** en \mathbf{x}_0 , et on note $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq \eta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Remarque : Cette définition ne dépend pas de la norme choisie sur \mathbb{R}^2 (théorème d'équivalence). Par ailleurs, si f admet $+\infty$ pour limite en \mathbf{x}_0 : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq \eta \implies f(\mathbf{x}) \geq A$.

Proposition II.1 (Unicité de la limite). Si f admet une limite en \mathbf{x}_0 , celle-ci est unique.

Démonstration : Supposons $f(\mathbf{x}) \rightarrow L$ et $f(\mathbf{x}) \rightarrow L'$ en \mathbf{x}_0 . Pour tout $\varepsilon > 0$, pour \mathbf{x} assez proche de \mathbf{x}_0 :

$$|L - L'| = |L - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - L'| \leq |f(\mathbf{x}) - L| + |f(\mathbf{x}) - L'| < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $L = L'$. □

Proposition II.2 (Caractérisation séquentielle de la limite). $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ si et seulement si pour toute suite $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ convergeant vers \mathbf{x}_0 , on a $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow L$.

Démonstration (esquisse) : Le sens (\implies) est immédiat par définition. Pour (\impliedby), on procède par contraposée : si f ne tend pas vers L , il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite (\mathbf{x}_n) avec $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \leq 1/n$ et $|f(\mathbf{x}_n) - L| \geq \varepsilon_0$. □

Proposition II.3 (Opérations sur les limites). Si $f \rightarrow L_1$ et $g \rightarrow L_2$ en \mathbf{x}_0 , alors en \mathbf{x}_0 : $\alpha f + \beta g \rightarrow \alpha L_1 + \beta L_2$, $fg \rightarrow L_1 L_2$, et $f/g \rightarrow L_1/L_2$ si $L_2 \neq 0$.

b) Permutation des limites itérées

Proposition II.4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$. Si de plus, pour tout x , $\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$ existe, et pour tout y , $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$ existe, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = L.$$

Remarque : L'hypothèse cruciale est l'existence de la limite double. Sans elle, les limites itérées peuvent exister et différer : c'est le cas de $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ au voisinage de $(0,0)$.

c) Fonctions continues

Définition II.2. Soit $p \in U$. On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** en p si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow p} f(\mathbf{x}) = f(p)$, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|\mathbf{x} - p\| \leq \eta \implies |f(\mathbf{x}) - f(p)| \leq \varepsilon.$$

On dit que f est **continue sur** U si elle est continue en tout point de U .

Exemple détaillé. Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x - 2y$ est continue.

Soient $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ et $\mathbf{z} = (x, y)$ avec $\|\mathbf{z} - \mathbf{p}\|_\infty \leq \eta$, c'est-à-dire $|x - x_0| \leq \eta$ et $|y - y_0| \leq \eta$. Alors :

$$|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{p})| = |(x - x_0) - 2(y - y_0)| \leq |x - x_0| + 2|y - y_0| \leq 3\eta.$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon/3$.

Proposition II.5 (Image réciproque d'un ouvert). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si V est un ouvert de \mathbb{R} , alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Démonstration : Soit $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V)$; alors $f(\mathbf{x}_0) \in V$. Comme V est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(\mathbf{x}_0) - \varepsilon, f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon[\subset V$. Par continuité de f en \mathbf{x}_0 , il existe $\eta > 0$ tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \eta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \varepsilon$, donc $f(\mathbf{x}) \in V$, i.e. $\mathbf{x} \in f^{-1}(V)$. Ainsi $B(\mathbf{x}_0, \eta) \subset f^{-1}(V)$. \square

Application. Montrons que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 . La projection $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ est continue et $U = \pi_1^{-1}(]0, +\infty[)$. Comme $]0, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R} , U est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Proposition II.6 (Opérations sur les fonctions continues). Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur U .

- (i) $|f|, \alpha f + \beta g, fg$ sont continues sur U ;
- (ii) f/g est continue sur $\{x \in U \mid g(x) \neq 0\}$;
- (iii) si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $h \circ f$ est continue sur U .

Corollaire II.1. Toute fonction polynomiale en n variables est continue sur \mathbb{R}^n . En particulier, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

d) Continuité partielle

Définition II.3. Soit $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto f(x, \beta)$ est la **fonction partielle par rapport à la première variable**. On définit de même $y \mapsto f(\alpha, y)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

Proposition II.7. Si f est continue en $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$, alors les deux fonctions partielles $x \mapsto f(x, \beta)$ et $y \mapsto f(\alpha, y)$ sont respectivement continues en α et β .

Démonstration : La fonction $x \mapsto f(x, \beta)$ est la composée de $x \mapsto (x, \beta)$ (continue) et de f (continue en \mathbf{a}) ; donc elle est continue en α . \square

Attention : la réciproque est fautive ! La continuité des fonctions partielles n'implique pas la continuité de f .

Contre-exemple classique. Posons

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions partielles vérifient $f(x, 0) = f(0, y) = 0 \rightarrow 0$ en 0. Pourtant $f(t, t) = 1/2$ pour tout $t \neq 0$, donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Remarque : La technique du chemin particulier est un outil puissant pour réfuter l'existence d'une limite : si f admet des limites différentes selon deux chemins convergeant vers \mathbf{x}_0 , elle n'a pas de limite en \mathbf{x}_0 .

e) Étude de limites en $(0, 0)$ — méthodes

Deux exemples illustrant les techniques principales.

Exemple 1 — chemin particulier (absence de limite). Soit $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^6}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus$

$\{(0, 0)\}$. On a $f(x, 0) = 0 \rightarrow 0$, mais $f(x, x) = \frac{x^4}{x^4 + x^6} = \frac{1}{1 + x^2} \rightarrow 1$. Les limites selon deux chemins sont différentes : f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Exemple 2 — passage en polaires (existence de limite). Soit $g(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^6}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si g admet une limite en $(0, 0)$, elle est nulle (vérifiable sur les axes). En posant $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$:

On majore par une inégalité plus grossière : par AM-GM, $x^4 + y^6 \geq 2|x|^2|y|^3$, donc $|g(x, y)| \leq \frac{|x|^3 y^2}{2|x|^2|y|^3} = \frac{|x|}{2|y|}$ — cette voie échoue. On utilise plutôt : $x^4 + y^6 \geq \rho^4 \cos^4 \theta$, d'où $|g| \leq \frac{\rho^5 |\cos^3 \theta| |\sin^2 \theta|}{\rho^4 \cos^4 \theta} = \rho \cdot \frac{|\sin^2 \theta|}{|\cos \theta|}$, ce qui ne majore pas uniformément.

Une majoration correcte : $x^4 + y^6 \geq \frac{1}{2}(x^4 + y^4)$ pour $|y| \leq 1$, et $|g(x, y)| \leq \frac{|x|^3 y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{|x|^3 y^2}{2|x|^2|y|^2} = \frac{|x|}{2} \rightarrow 0$. Donc $g \rightarrow 0$ en $(0, 0)$.

III. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

U désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Les définitions sont données en dimension 2 et se généralisent sans difficulté.

a) Dérivées partielles

Définition III.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{p} = (a, b) \in U$. On appelle **dérivée partielle de f par rapport à x en \mathbf{p}** la limite (si elle existe) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

C'est la dérivée en a de l'application partielle $\varphi_1 : x \mapsto f(x, b)$. On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ comme dérivée en b de $\varphi_2 : y \mapsto f(a, y)$.

Exemple. Pour $f(x, y) = x^2 e^y + \sin(xy)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^y + y \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 e^y + x \cos(xy).$$

Mise en garde. L'existence des dérivées partielles en un point n'implique ni la continuité de f en ce point, ni aucune propriété de régularité globale (voir exercice 4).

b) Fonctions de classe C^1

Définition III.2. On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de **classe C^1** sur U , et on note $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, si f admet des dérivées partielles sur U et si ces dérivées partielles sont *continues* sur U .

Théorème III.1 (Différentiabilité des fonctions C^1). *Si $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, alors pour tout $\mathbf{p} = (a, b) \in U$ et tout $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$:*

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) h_2 + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{quand } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

En particulier, toute fonction de classe C^1 est continue.

Remarque : Le développement limité ci-dessus définit la différentielle de f en \mathbf{p} : $df_{\mathbf{p}}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) h_2$. Le vecteur gradient $\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \right)$ indique la direction de plus grande croissance de f en \mathbf{p} .

c) Règle de la chaîne (dérivation composée)

Théorème III.2 (Règle de la chaîne). Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, et $\gamma = (u, v) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ de classe C^1 . Alors $F = f \circ \gamma \in C^1(I, \mathbb{R})$ et :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial u},$$

où $\gamma = (u_1, u_2)$. En notation matricielle (jacobienne) : $J_F = J_f \cdot J_\gamma$.

Démonstration (esquisse) : On écrit $f(\gamma(\mathbf{u} + \mathbf{h})) - f(\gamma(\mathbf{u}))$ en deux étapes en utilisant le développement de f au premier ordre et la différentiabilité de γ . \square

Exemple. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F(u, v) = f(u + uv, u - uv^2)$. Alors $F \in C^1$ et :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = (1 + v) \frac{\partial f}{\partial x}(u + uv, u - uv^2) + (1 - v^2) \frac{\partial f}{\partial y}(u + uv, u - uv^2).$$

d) Dérivées partielles successives et classe C^k

Définition III.3. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \{1, 2\}^2$. On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2** en \mathbf{a} par rapport aux variables x_i puis x_j si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur un voisinage de \mathbf{a} et est dérivable par rapport à x_j en \mathbf{a} . On note alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\mathbf{a}).$$

Définition III.4. On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de **classe C^k** sur U (pour $k \geq 1$) si toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ existent et sont continues sur U . Si f est C^k pour tout k , on dit que f est C^∞ (ou *lisse*).

Théorème III.3 (Schwarz, admis). Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Alors pour tout $\mathbf{a} \in U$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}).$$

Remarque : L'hypothèse C^2 est essentielle. L'exemple de Peano montre qu'elle ne peut être affaiblie : pour $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ (étendue par $f(0, 0) = 0$), on peut vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, et que $f \notin C^2$ en $(0, 0)$.

e) Équations aux dérivées partielles

La règle de la chaîne permet de résoudre certaines EDP par changement de variables.

Exemple 1 — EDP simple. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^3 + y$.

On intègre par rapport à x (en traitant y comme un paramètre) :

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy + C(y),$$

où $C(y) = f(0, y)$ est une fonction de classe C^1 en y (nécessaire pour que $f \in C^1$). Réciproquement, toute telle f convient.

Exemple 2 — EDP avec changement de variables. Trouver toutes les $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

On pose le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$ (soit $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$) et $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

Donc g ne dépend pas de u , soit $g(u, v) = h(v)$ avec $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En revenant aux variables initiales : $f(x, y) = h(x - y)$.

IV. Extrema de fonctions de deux variables

Dans tout ce paragraphe, U désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 .

a) Définitions

Définition IV.1. Soit $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{p} \in X$.

- f admet un **maximum global** en \mathbf{p} si $\forall \mathbf{z} \in X$, $f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{p})$.
- f admet un **maximum local** en \mathbf{p} si $\exists \eta > 0$, $\forall \mathbf{z} \in X \cap B(\mathbf{p}, \eta)$, $f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{p})$.

On définit de même le minimum (local ou global). Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

b) Points critiques

Définition IV.2. Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $\mathbf{p} \in U$. On dit que \mathbf{p} est un **point critique** (ou *point stationnaire*) de f si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = 0, \quad \text{i.e. } \nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}.$$

Théorème IV.1 (Condition nécessaire d'extremum local). Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Si f admet un extremum local en $\mathbf{p} \in U$, alors \mathbf{p} est un point critique de f .

Démonstration : Supposons f maximum local en $\mathbf{p} = (a, b)$. La fonction partielle $x \mapsto f(x, b)$ admet un maximum local en a , donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$. De même pour y . \square

Remarque : La réciproque est fautive : un point critique peut n'être ni un maximum ni un minimum local. On parle alors de **point-selle** (ou *point col*). L'étude des dérivées secondes (matrice hessienne, hors programme ici) permet de trancher dans la plupart des cas réguliers.

Exemple. Pour $f(x, y) = x^3 + y^3$, on a $\nabla f = (3x^2, 3y^2)$, donc $(0, 0)$ est l'unique point critique. Mais $f(t, 0) = t^3$ change de signe au voisinage de 0, donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.

Exercices

Exercice n°1

Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2 :

- a) \mathbb{R}^2 b) $]0, 1[$ c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \cos x\}$

Exercice n°2

Les deux questions sont indépendantes.

- a) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de \mathbb{R}^2 . Montrer que $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- b) Montrer que l'intersection de deux ouverts de \mathbb{R}^2 est un ouvert.

Exercice n°3

Calculer les dérivées partielles des fonctions :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^y; \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-x} \sin(x^2 + y^2).$$

Exercice n°4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$. Montrer que f n'admet pas de dérivées partielles en $(0, 0)$ mais que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est de classe C^1 . Préciser ses dérivées partielles.

Exercice n°5

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\theta : t \mapsto f(t^2, t^3)$ est de classe C^1 et calculer $\theta'(t)$.

Exercice n°6

$$\text{Soit } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
- Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$ (examiner la limite le long de $y = x^2$).

Exercice n°7

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement s'il existe $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = h(x)$.

Exercice n°8 (oraux MP CCINP 2022)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Prouver : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
- Justifier que le domaine de définition de f est bien \mathbb{R}^2 .
 - Déterminer α pour que f soit continue sur \mathbb{R}^2 .
- Dans cette question, on suppose : $\alpha = 0$.
 - Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
 - Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
 - La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice n°9

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ pour tout (a, b) . Montrer qu'il existe $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(x, y) = h(2x + y)$.

Indication : poser $x = u + v$, $y = u - 2v$ et étudier $g(u, v) = f(u + v, u - 2v)$.

Exercice n°10

Étudier l'existence des limites en $(0, 0)$ des fonctions :

$$\text{a) } (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{b) } (x, y) \mapsto \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4} \quad (\text{Ind. : poser } X = x^3, Y = y^2, \text{ puis polaires.})$$

Exercice n°11

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Étudier la continuité de f , l'existence et la continuité de ses dérivées partielles.

Exercice n°12

Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
- Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
- Conclure vis-à-vis du théorème de Schwarz.

Exercice n°13 (d'après CCP)

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x, y, y^2)$$

On dit alors qu'on étudie la fonction g **sous la contrainte** $z = y^2$.

- Expliciter** $f(x, y)$, et calculer :

$$\partial_1(f)(x, y), \quad \partial_2(f)(x, y), \quad \partial_1^2(f)(x, y), \quad \partial_{12}^2(f)(x, y) \quad \text{et} \quad \partial_2^2(f)(x, y)$$

- Déterminer les extrema éventuels de f sur \mathbb{R}^2 .**
- Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,**

$$g(x, y, z) = 4 \left(x + \frac{1}{2}z \right)^2 + 4 \left(y - \frac{1}{2}z \right)^2.$$

En déduire que f admet un minimum global en $(0, 0)$.

- Montrer que f présente un minimum local en $(-2, 2)$.**

Exercice n°14

Soit $f(x, y) = (x^2 + x + y - \frac{1}{2})^2 + y^2$.

- Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et déterminer ses points critiques.
- Montrer que f admet un minimum local. Ce minimum est-il global ?
- f admet-elle un maximum global ?

Exercice n°15

Soit $f(x, y) = x^2y + \ln(1 + y^2)$.

- Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et déterminer ses points critiques.
- En étudiant les signes de $f(x, -x^3)$ et $f(0, y)$, montrer que f n'a pas de minimum local en $(0, 0)$.
- Que peut-on conclure sur les extrema globaux de f ?

Exercice n°16

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ admet un prolongement de classe C^1 à \mathbb{R}^2 .

Exercice n°17

Donner les extrema (globaux et locaux) de $f(x, y) = -2x^3 + 3x^2 + y^2$.

Exercice n°18

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x, y) = f(y, x)$ pour tout (x, y) . Quelle relation lie $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$?

Exercice n°19

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (équation de Laplace). On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ en fonction des dérivées partielles de f .
- Montrer que $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0$.

Exercice n°20

Soit $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et $U =]0, +\infty[\times] -\pi/2; \pi/2[$. Soit $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- Justifier que P est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- Montrer que $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$.
- Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.
- En déduire l'expression du Laplacien en coordonnées polaires : $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}$.

Exercice n°21

On cherche les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. En posant $u = x + y$, $v = x + 2y$ et $g(u, v) = f(x, y)$, déterminer l'ensemble de ces fonctions.

Exercice n°22

Soit $f(x, y) = x e^{x(y^2+1)}$.

- Justifier que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et calculer ses dérivées partielles.
- Montrer que le seul point critique de f est $A = (-1, 0)$.
- Montrer que $f(x, y) \geq x e^x$ pour tout (x, y) , et en déduire que A est un minimum global de f .

Deuxième année classe préparatoire INP des Hauts-de-France, lycée Fénélon Cambrai — M. Calciano