Chapitre 4 : Compléments sur séries numériques

M. Calciano

I. Rappels de première année

1 – Définition

Étant donné une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (nombres réels ou complexes), on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **série de terme général** u_n. On la note simplement $\sum u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée **somme partielle d'indice** n de $\sum u_n$.

Remarque : il est très facile de retrouver u_n à partir de S_n : en effet, $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ si $n \geq 1$.

2 – Convergence

a) Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite des sommes partielles (S_n) l'est.

Dans ce cas, la **somme de la série** est la limite des sommes partielles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série est **divergente**.

Exemple : Soit $u_n = 3^n$ (suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$). Alors

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2},$$

et $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Donc la série $\sum 3^n$ diverge.

b) Théorème dit de condition nécessaire de convergence

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Attention : la convergence du terme général vers 0 ne suffit pas à établir la convergence de la série.

c) Théorème de comparaison suite-série

Soient (a_n) et (u_n) deux suites numériques telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_{n+1} - a_n$.
Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_0.$$

3 – Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Le **reste d'indice** n de $\sum u_n$ est défini par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$. De plus, la suite (R_n) converge vers 0.

4 – Comparaison (séries à termes positifs)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $0 \leq u_n \leq v_n$.

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

— Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : il suffit de revenir aux sommes partielles...

Exemple : Comme $0 \leq \dfrac{1}{1+2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$ et la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on en déduit que $\sum \frac{1}{1+2^n}$ converge.

5 – Règle dite des équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes toutes les deux).

Démonstration : Si $u_n \sim v_n$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $0 \leq \frac{u_n}{2} \leq v_n \leq 2u_n$, et on revient aux sommes partielles.

Exemple : $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge (télescopique), donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

6 – Règle dite des comparaisons (notations de Landau)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

— Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge.

— Si $\sum v_n$ converge et $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge.

7 – Comparaison série-intégrale (1)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors $\forall k \geq 1$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt.$$

Par sommation :

$$f(0) + \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,dt.$$

8 – Séries de référence

Séries géométriques : Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Séries de Riemann : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

9 – Règle de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes de signe constant (au moins à partir d'un certain rang).

— S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$ (ou $n^\alpha u_n \to L \in \mathbb{R}^*$), alors $\sum u_n$ converge.

— S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \to L \in \mathbb{R}^*$ (ou $\to \pm\infty$), alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice : Soit $\sum u_k$ avec $u_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$. Déterminer la convergence de la série par :

— comparaison avec une série de Riemann,

— application de la règle de Riemann.

Un élève écrit : $\dfrac{k}{(k+1)(k+2)} \to 0$, donc $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = o\left(\frac{1}{k}\right)$ et la série diverge. Que peut-on en penser ?

10 – Règle de D'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ converge et on note L sa limite.

— Si $L > 1$: $\sum u_k$ diverge.

— Si $L < 1$: $\sum u_k$ converge.

— Si $L = 1$: on ne peut pas conclure avec ce critère.

Exercice : Démontrer que pour tout $x > 0$, $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge (il s'agit de l'exponentielle).

II. Absolue convergence

1 – Définition

Une série $\sum u_k$ est **absolument convergente** s'il existe une série $\sum v_k$ à termes réels positifs convergente telle que $u_k = o(v_k)$ ou $u_k = O(v_k)$ quand $k \to +\infty$.

2 – Comparaison d'une série complexe à une intégrale (2)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que f' soit intégrable sur $[a, +\infty[$. Alors la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$$

est absolument convergente.

Démonstration : À partir de $n_0 > a$, on a par intégration par parties :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = nf(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\,dt.$$

Donc

$$w_n = (n-1)(f(n) - f(n-1)) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\,dt = \int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)\,dt.$$

On en déduit $|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,dt$. Or f' est intégrable, donc la série de terme général $\int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,dt$ converge, et par majoration, $\sum |w_n|$ converge.

3 – Exemple

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ pour $n \geq 1$ diverge.

Indication : On montrera que la série des u_n est de même nature que la série de terme général $\int_{n-1}^{n} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt$.

Démonstration : Soit $f(t) = \frac{\sin(\ln t)}{t}$ sur $]1, +\infty[$. f est C^1 et

$$f'(t) = \frac{\cos(\ln t) - \sin(\ln t)}{t^2}.$$

Comme $|f'(t)| \leq \frac{2}{t^2}$, f' est intégrable sur $]1, +\infty[$. Ainsi $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$ avec $v_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt$. Or

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \int_1^n \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt = \int_0^{\ln n} \sin u\,du = 1 - \cos(\ln n),$$

qui n'a pas de limite quand $n \to \infty$. Donc $\sum u_n$ diverge.

III. Compléments

1 – Formule de Stirling

$$n! \sim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Application : Donner un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

2 – Séries alternées

a) Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ est **alternée** si la suite $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

b) Théorème (CSSA – Critère spécial des séries alternées)

Si $\sum u_n$ est alternée, si le terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration : Quitte à changer u_n en $-u_n$, on peut supposer $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$. On a :

$$S_{2n+2} = S_{2n} - v_{2n+1} + v_{2n+2}, \quad S_{2n+3} = S_{2n+1} - v_{2n+3} + v_{2n+2}.$$

La décroissance de v_n donne $S_{2n+2} \leq S_{2n}$ et $S_{2n+1} \leq S_{2n+3}$. De plus $S_{2n+1} - S_{2n} = v_{2n+1} \to 0$. Les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc (S_n) converge.

Application : Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

c) Théorème de « maîtrise » du reste

Si $\sum u_n$ est alternée, décroissante en valeur absolue et tend vers 0, alors $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

3 – Règle de D'Alembert (généralisée)

Soit (u_n) une suite à termes non nuls (à partir d'un certain rang) telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

— Si $L < 1$: la série converge absolument (et donc converge).

— Si $L > 1$: la série diverge grossièrement.

— Si $L = 1$: cas douteux.

Démonstration : Si $L < 1$, choisissons $\rho \in]L, 1[$. Il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \rho$. Par récurrence, $|u_n| \leq |u_{n_0}| \rho^{n-n_0}$, d'où la convergence absolue. Si $L > 1$, choisissons $\rho \in]1, L[$, alors $|u_n| \geq |u_{n_0}| \rho^{n-n_0}$, donc divergence.

Application : Pour $z \in \mathbb{C}^*$, démontrer la convergence absolue de $\sum \frac{z^n}{n!}$.

4 – Remarque importante

Il est possible d'avoir des séries alternées dont les termes sont équivalents, par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Cependant, la convergence de l'une n'entraîne pas celle de l'autre !

IV. Techniques de comparaison

1 – Comparaison série-intégrale avec décroissance

Soit $f \in C^0_{\text{pm}}([0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ une fonction décroissante et intégrable. Alors la série $\sum f(n)$ converge. De plus,

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \leq f(n) + \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Application : Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

2 – Produit de Cauchy de deux séries

a) Définition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes. Le **produit de Cauchy** est la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

b) Théorème

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Exercice classique : Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Montrer que

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n.$$

V. Développement asymptotique

Technique utile pour les séries à termes quelconques. On conclut sur la nature en donnant un développement asymptotique du terme général.

Exemple : Série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. La suite n'est pas décroissante, donc CSSA non applicable. Développement limité :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Le premier terme donne une série convergente (CSSA), les suivants des séries absolument convergentes. Donc la série initiale converge.

VI. Une application intéressante : l'exponentielle

1 – Définition

Pour tout $u \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente. Sa somme est appelée **exponentielle** de u, notée $\exp(u)$:

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Démonstration : $\left|\frac{u^n}{n!}\right| \leq \frac{|u|^n}{n!}$ *et on applique le critère de D'Alembert à* $\sum \frac{|u|^n}{n!}$.

2 – Propriété fondamentale

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z + z') = \exp(z)\,\exp(z').$$

Démonstration :

$$\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \exp(z + z').$$

VII. Exercices

Exercice n°1

1) En utilisant la comparaison avec une intégrale, démontrer que la série harmonique diverge.
2) Toujours avec la même méthode, prouver l'existence d'un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

(Comment s'appelle ce réel γ ?)

3) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice n°2 Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n>0} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice n°3 Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1) Donner la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
2) a) Soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
   b) Déterminer un équivalent du reste d'indice n de la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.

Exercice n°4 (oraux de concours) – Les deux questions sont indépendantes.
1) [Image : texte mathématique à décrire selon votre original]
2) [Image : texte mathématique à décrire selon votre original]

Exercice n°5 Pour chacune des séries, justifier l'existence et effectuer le calcul de la somme :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$
2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice n°6 Les trois questions suivantes sont indépendantes :

1) On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$. Justifier la convergence de cette série. On note S sa somme, S_n sa somme partielle. Déterminer n pour que $|S - S_n| \leq 10^{-2}$.
2) Déterminer la nature de la série de terme général $\cos\left(n^2\pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$. *Indication : faire un DL à l'ordre 4 en 0 de* $\ln(1-x)$.
3) a) Préciser la nature de la série de terme général $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ en fonction des réels a et b.
   b) Calculer alors sa somme.

Exercice n°7 Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$.

Exercice n°8 Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2}$.

Exercice n°9 Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge, et si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge. *Indication : poser* $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$ *et* $v_n = n^\beta u_n$.

Exercice n°10 (oraux de concours) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

alors la série

$$\sum u_n$$

converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}?$$

Exercice n°11 (concours) Soit $\alpha \in [0, \pi]$.

On souhaite démontrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$.
a. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0. Calculer I_0, et $I_n + I_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
c. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
2. On pose, pour $t \in [\alpha, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{e^{it}-1} \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$$

a. Montrer : $S_n(t) = \varphi(t)\left(e^{i(n+1)t} - e^{it}\right)$. Exprimer $\varphi(t)e^{it}$ en fonction de $\frac{e^{it/2}}{\sin(t/2)}$.
b. Montrer : $\int_\alpha^\pi \varphi(t)e^{i(n+1)t}\,dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. *(indication : on pourra utiliser une intégration par parties)*
c. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$ converge, et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n} = -\ln(2) + i\int_\alpha^\pi \varphi(t)e^{it}\,dt$$

d. En déduire la convergence et la somme des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$.

Exercice n°12 En utilisant la comparaison série-intégrale, donner la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Exercice n°13 Soit p un réel strictement compris entre -1 et 1. En considérant le produit de Cauchy de $\sum p^n$ par elle-même, montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p^n = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Exercice n°14 (oraux de concours) – [Image]

Exercice n°15 On souhaite former un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1) Justifier que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
2) Montrer que $\frac{1}{n}$ est le reste de la série convergente $\sum \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$.
3) Soit $d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$. Montrer que $d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2(k-1)}$.
4) Montrer par comparaison avec une intégrale que $d_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
5) Conclure.

Exercice n°16

1) Justifier que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.
2) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
   a) Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

b) Déterminer un équivalent de R_n (indication : évaluer $R_n - R_{n+1}$).
c) Donner la nature de $\sum_{n\geq 1} R_n$.

Exercice n°17 – Autour de D'Alembert (les deux questions sont indépendantes)

1) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n}{2^n}$?
2) Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Établir que $\sum_{n\geq 1} \frac{z_n}{n}$ converge. *Indication : poser* $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ *et remarquer que* $z_n = S_n - S_{n-1}$.

Exercice n°18 (oraux de concours) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

1) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.
2) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3) Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.
4) Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5) En déduire la nature de $\sum u_n$.

Deuxième année classe préparatoire INP des Hauts-de-France, lycée Fénelon Cambrai — M. Calciano