Suites de fonctions

M. Calciano

Deuxième année — Classe préparatoire INP2 Cambrai

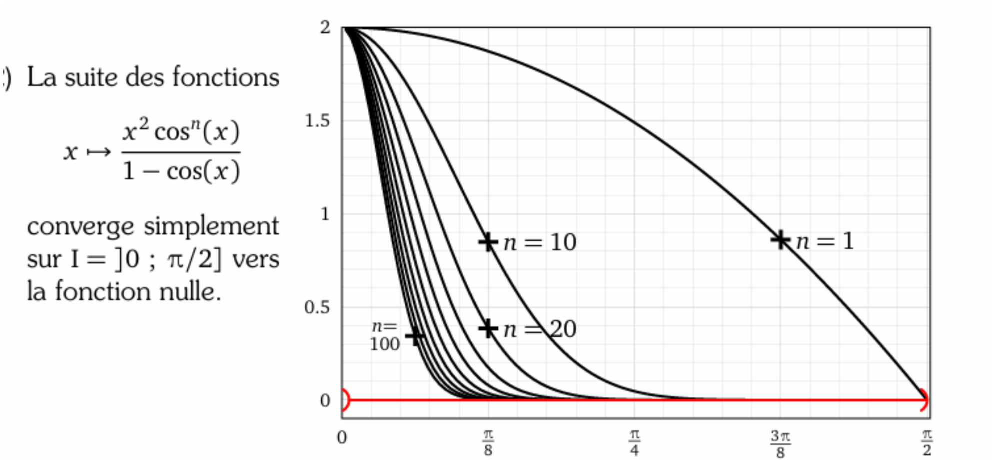
I. Modes de convergence

1.1. Convergence simple

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ si pour tout $x \in I$:

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Remarque. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.



Exemple. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

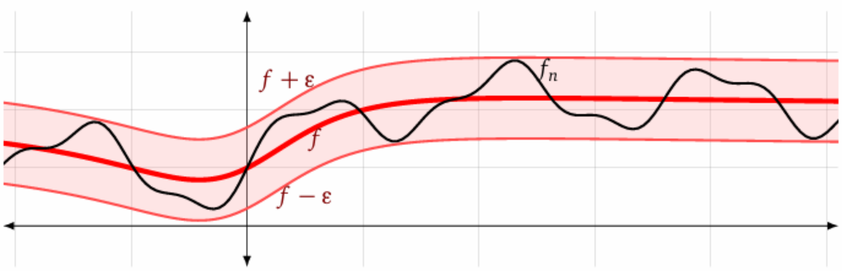
Attention. Certaines propriétés analytiques ne « passent pas à la limite » : par exemple, la continuité (comme le montre l'exemple précédent). En revanche, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement, respectivement, vers f et g, alors $f_n + g_n$ converge simplement vers $f + g$.

1.2. Convergence uniforme

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarques. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si la fonction $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang et si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.



Proposition youtu.be/ErwWUazZQZU

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.

Démonstration. On a :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tout $x \in I$ fixé :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. □

Exemple. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

On montre que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \ \leq\ f_n(x) - f(x) \ \leq\ \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \ =\ \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Remarque. Pour montrer qu'il n'y a *pas* convergence uniforme, on peut chercher une suite (x_n) d'éléments de I telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tende pas vers 0.

Exemple. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{x+n}{x+n}$ converge simplement vers la fonction nulle, puis à l'aide de $x_n = n$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice classique : obtention de la convergence uniforme par découpage d'intervalle.

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0, \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}.$$

1. Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leq x$.
2. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Établir la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Indication. Distinguer selon que $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$ ou $x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

II. Régularité de la limite

2.1. Continuité

Théorème. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f, et si pour tout entier naturel n, f_n est continue, alors f est continue.

Démonstration. On remarque que pour $x, a \in I$:

$$f(x) - f(a) = \big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - f_n(a)\big) + \big(f_n(a) - f(a)\big).$$

Or $|f(x) - f_n(x)|$ et $|f_n(a) - f(a)|$ tendent vers 0 par convergence uniforme, et $|f_n(x) - f_n(a)|$ tend vers 0 lorsque $x \to a$ par continuité de f_n. □

2.2. Intégration

youtu.be/LOCWoWzTLIk

Théorème. On suppose que $I = [a, b]$ avec $a < b$ et que les fonctions f_n sont continues. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Démonstration. On a :

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f|.$$

Puisque la convergence est uniforme et que les fonctions sont continues sur le segment $[a, b]$, elles sont bornées. Ainsi :

$$0 \leq \int_a^b |f_n - f| \leq (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \square$$

Étude d'un exercice classique.

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{(x^2+1)^n e^x + x\,e^{-x/n}}{+x}.$$

1. Montrer que f_n converge uniformément vers $f(x) = (x^2+1)e^x$ (indication : montrer que $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2(e+1)}{n}$).
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ (on doit obtenir $2e - 3$ après intégration par parties).

2.3. Dérivation

Théorème. Si pour tout entier naturel n, les fonctions f_n sont $\mathcal{C}^1$,
si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f,
si la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g,
alors f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Démonstration. Soient x et a dans I. On a :

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)\,dt \to \int_a^x g(t)\,dt$$

d'après le théorème précédent. Or par convergence simple de f_n vers f, on a $f_n(x) - f_n(a) \to f(x) - f(a)$. Donc :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

L'application $x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$, il en va de même pour f. $\square$

2.4. Théorème sur la dérivation d'ordre supérieur

Soit p un entier naturel non nul.

Théorème. Si pour tout entier naturel n, les fonctions f_n sont $\mathcal{C}^p$, si pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, si la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ et tout $x \in I$: $f^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x)$.

2.5. Théorème de la double limite

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I, et soit $\alpha \in \overline{I}$ un point d'accumulation de I.

Théorème. Si (f_n) converge uniformément sur I et si pour tout n la limite $\lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x)$ existe, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to\alpha} f_n(x) = \lim_{x\to\alpha} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

III. Le théorème de convergence dominée

3.1. Théorème (admis)

Théorème (convergence dominée). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I.
S'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

(hypothèse dite de domination), alors toutes les fonctions f_n ainsi que f sont intégrables sur I et :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

3.2. Exemple

Soit $f_n :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1+t^n}{1+t^{n+2}}$, et $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$.

Tout d'abord, pour $t > 1$ fixé, on a :

$$\frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^2},$$

donc la suite (f_n) converge simplement vers $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, continue par morceaux sur $]1, +\infty[$.

Vérifions l'hypothèse de domination : pour $t > 1$,

$$\frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \leq \frac{t^n+t^n}{1+t^{n+2}} = \frac{2}{t^2},$$

qui est intégrable sur $]1, +\infty[$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1.$$

Exercices

Exercice n°0

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont périodiques de période T, alors f aussi.
3. Si les f_n sont continues en $a \in I$, alors f aussi.

Reprendre l'exercice avec la convergence uniforme à la place de la convergence simple.

Exercice n°1

Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) pour tout entier naturel n :

1. $\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$.
2. $\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ (aborder la convergence uniforme de deux façons).

Exercice n°2

1. Une fonction continue sur un segment peut-elle être approchée uniformément sur ce segment par des fonctions polynomiales ? (Penser au théorème de Weierstrass.)
2. Soient a et b des réels non nuls tels que $a < b$, et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\, t^n\, dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice n°3

Soit (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Montrer que f est polynomiale.

Exercice n°4

youtu.be/IpQQd11S9Kg

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + 2n \cdot nx^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.
4. La suite de fonctions converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice n°5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel n, on pose :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de (f_n).

2. Soit $a > 0$, étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$.
3. A-t-on convergence uniforme sur $]0, +\infty[$?

Exercice n°6 (oraux concours)

On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$f_n(x) = \frac{n+2}{n+1}\, e^{-nx^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
3. (a) Soit $a > 0$ et $b > a$, la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, b]$?
   (b) Peut-on en déduire la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$? sur $]0, +\infty[$?
4. Soit $a > 0$, la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
5. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice n°7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Montrer que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qui n'est pourtant pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°8

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$.

On rappelle que $\forall\, u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$.

Exercice n°9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[, \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

Exercice n°10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\big(1 + t^n\big)\, dt$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. À l'aide du changement de variable $t = u^{1/n}$, déterminer la limite de I_n.

Exercice n°12

Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^n}$ sans la calculer, à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$.

Exercice n°13

On définit la suite de fonctions (f_n) pour tout entier naturel non nul n, sur $\mathbb{R}$, par $f_n(x) = n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

1. La suite converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Si oui, vers quelle fonction ?
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°14

On définit une suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f dérivable.
2. Montrer que (f_n') converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g.
3. Vérifier que $f' \neq g$. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice n°15

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0,1]$ telles que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est finalement uniforme.

Exercice n°16

Démontrer que la limite uniforme de fonctions uniformément continues est elle-même uniformément continue.

Exercice n°17

À l'aide du théorème de convergence dominée, déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ des suites suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \, dt$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} \, dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{n}{1+x^2} \, dx$ (rem. : vérifier que $\frac{n}{1+x^2} \to 0$ pour x fixé)

Exercice n°18

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

1. Démontrer que, pour $x \geq 0$, $f_n(x)$ converge simplement vers e^x.
2. Démontrer que $f_n(x) \leq e^x$.
3. En déduire, pour $b > 1$, la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} \, dx$.