Espaces euclidiens

M. Calciano

I. Produit scalaire

Formes bilinéaires

Définition. On appelle *forme bilinéaire* sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire ;
- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Définition. On appelle *forme bilinéaire symétrique* sur E toute forme bilinéaire φ vérifiant $\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Définition. Étant donné une forme bilinéaire φ sur E, on dit que :

- la forme φ est **positive** si $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geq 0$;
- la forme φ est **définie** si $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Exemple. L'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(X, Y) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé le *produit scalaire canonique*.

Exercice n°1

Montrer que $\varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$.

Définition. On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'espace vectoriel euclidien.

Remarque. Ces définitions s'adaptent dans le cadre complexe (le produit scalaire est linéaire pour une variable, anti-linéaire pour l'autre) et un espace de dimension finie muni d'un tel produit scalaire s'appelle **hermitien**.

Norme et distance associées à un produit scalaire

Définition. On appelle *norme associée* à un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ l'application

$$E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}.$$

Définition. On appelle *distance associée* au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ l'application

$$E^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|.$$

Identités remarquables

Propriété. Soit $(x, y) \in E^2$:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y),$$

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Démonstration.
Il suffit de développer $\|x+y\|^2 \dots$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème. La norme associée au produit scalaire vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration.
Soit $\varphi(t) = \|x+ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 + 2(x, y)\, t + \|x\|^2$, *on reconnaît un trinôme du second degré en* t.
Or $\|x+ty\|^2 \geq 0$, *donc* $\Delta = 4(x, y)^2 - 4\|y\|^2 \|x\|^2 = 4\big((x, y)^2 - \|y\|^2 \|x\|^2\big) \leq 0$. *D'où* $|(x, y)| \leq \|y\| \, \|x\|$.
De plus $\Delta = 0$ *si et seulement si* $\|x+ty\|^2 = 0$, *donc pour* x *et* y *liés.*

Propriétés de la norme

Proposition. La norme associée à un produit scalaire vérifie :

- la **séparation** : $\forall x \in E, \ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
- l'**homogénéité** : $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{R} \times E, \ \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;
- l'**inégalité triangulaire** : $\forall (x, y) \in E^2, \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, avec égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont positivement colinéaires (i.e. $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$).

Propriété dite de la seconde inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in E^2$: on a $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$.

Démonstration.
On a $(x-y)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \, \|y\|$ *et* $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x, y)$.
Or $(x, y) \leq \|x\| \, \|y\|$, *donc* $\|x-y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \, \|y\| = \big(\|x\| - \|y\|\big)^2$.

Proposition. La distance associée à un produit scalaire vérifie, pour tout $(x, y, z) \in E^3$:

- la **séparation** : $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;
- la **symétrie** : $d(x, y) = d(y, x)$;
- l'**inégalité triangulaire** : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
- la **seconde inégalité triangulaire** : $d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|$.

II. Expression matricielle d'un produit scalaire

Définition. Soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire et $\mathbf{e} = (e_1; \dots; e_n)$ une base de E. On appelle *matrice du produit scalaire* dans la base $\mathbf{e}$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \cdots & (e_1 \mid e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n \mid e_1) & \cdots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}.$$

Théorème. Soit $\mathbf{e} = (e_1; \dots; e_n)$ une base de E, x et y deux vecteurs de E. Soit A la matrice du produit scalaire dans $\mathbf{e}$. On note $X = \mathcal{M}_{\mathbf{e}}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathbf{e}}(y)$. Alors : $(x \mid y) = {}^tXAY$.

Démonstration.
Il suffit de développer ${}^tXAY$.

Remarque. Dans le secondaire, on utilisait la formule $(x \mid y) = {}^tXY$, tout simplement parce qu'on ne travaillait qu'avec le produit scalaire canonique et donc $A = I_n$.

Propriétés. Si A désigne la matrice d'un produit scalaire, alors :

- A est **symétrique** : $A = {}^tA$;
- A est **positive** : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geq 0$;
- A est **définie** : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$;
- A est **inversible**.

Théorème de changement de bases. Soient $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ deux bases de E, soit $P = P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$ la matrice de passage. Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{f}}(\cdot \mid \cdot) = {}^tP\, \mathcal{M}_{\mathbf{e}}(\cdot \mid \cdot)\, P.$$

III. Orthogonalité

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Définitions: On appelle *vecteur unitaire* tout vecteur de norme 1.

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $(x \mid y) = 0$. On note alors $x \perp y$.

Théorème de Pythagore. Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Démonstration.
On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y)$, or $(x,y) = 0$, donc $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Définition. On appelle *orthogonal d'une partie* A de E l'ensemble

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ (a \mid x) = 0\}.$$

Proposition. L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
Soit A une partie de E. On a $\mathrm{Vect}(A)^{\perp} = \mathrm{Vect}\big(A^{\perp}\big)$ (voir point 6), donc l'orthogonal de A est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples. L'orthogonal de $\{0\}$ est E ; l'orthogonal de E est $\{0\}$.

Proposition. Si A et B sont deux parties de E, alors $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Démonstration.
On suppose $A \subset B$.

Soit $x \in B^{\perp}$, i.e. $\forall y \in B,\ (x, y) = 0$; en particulier $\forall y \in A \subset B,\ (x, y) = 0$, donc $x \in A^{\perp}$.

Proposition. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, alors $\{x_1, \ldots, x_n\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)^{\perp}$.

Démonstration.
Soit $y \in \{x_1, \ldots, x_n\}^{\perp}$; $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(y, x_i) = 0$. Par linéarité du produit scalaire, $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\left(y, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0$, donc $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)^{\perp}$. L'autre inclusion est évidente.

Familles orthogonales et orthonormées

Définitions. On appelle famille **orthogonale** de E toute famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.

On appelle famille **orthonormée** de E toute famille de vecteurs de E unitaires et deux à deux orthogonaux.

Proposition. Toute famille orthogonale finie de vecteurs **non nuls** de E est libre. En particulier, toute famille orthonormée finie de E est libre.

Proposition. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Démonstration.
Par récurrence sur n en appliquant le théorème de Pythagore.

Théorème — Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$.

Exercice. Appliquer le processus d'orthonormalisation à la famille $\big((1, 1) ; (1, 0)\big)$.

Soit $u = (1, 1)$; on pose $f_1 = \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Soit $v = (1, 0)$; on détermine $v - p_{\mathrm{Vect}(f_1)}(v) = v - (v, f_1) f_1 = (1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

On pose $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

La famille (f_1, f_2) est orthonormée.

Définition. On appelle *base orthonormée* de E toute base de E qui est une famille orthonormée.

Théorème. Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Démonstration.
Si E est euclidien, E est de dimension finie et possède donc une base $(e_1, \dots, e_n)$; il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Proposition. **Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.**

- **Si x est un vecteur de E, alors : $x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)\, e_i$.**
- **Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.**

Démonstration.
Il suffit d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire.

IV. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Supplémentaire orthogonal

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *orthogonaux* si $\forall (x, y) \in F \times G,\ (x \mid y) = 0$.

Remarque. L'orthogonalité de F et G revient à $G \subset F^{\perp}$ et $F \subset G^{\perp}$.

Proposition. **Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé *supplémentaire orthogonal* de F, et on a $E = F \oplus F^{\perp}$.**

Démonstration.
Soit $x \in E$; on cherche un unique couple $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.
Analyse. Supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. F est de dimension finie, il possède donc une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$. Comme $z \in F^{\perp}$, $(z, e_i) = 0$ pour tout i entre 1 et p, donc $(z, e_i) = 0 = (x, e_i) - (y, e_i)$.

Or $y = \sum_{i=1}^{p} (e_i, y)\, e_i = \sum_{i=1}^{p} (e_i, x)\, e_i$ et $z = x - \sum_{i=1}^{p} (e_i, x)\, e_i$.

Ainsi, par construction, si un tel couple existe, il est unique.

Synthèse. Soit $x \in E$. On pose $y = \sum_{i=1}^{p} (e_i, x)\, e_i$ et $z = x - y$. On vérifie que $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ et que $x = y + z$.

Étude d'un classique.

On considère $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Propositions. **Si F est un sous-espace d'un espace euclidien E :**

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) \quad \textbf{et} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration.
Conséquence directe du résultat précédent.
De plus : $F \subset (F^\perp)^\perp$ *et* $\dim\big((F^\perp)^\perp\big) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F)$, *donc* $(F^\perp)^\perp = F$.

Proposition. Soit E de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont des bases orthonormées de deux supplémentaires orthogonaux.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F et $F^\perp$ admettent respectivement $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ comme bases orthonormées, alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Théorème de la base orthonormée incomplète. Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormée de E.
Démonstration.
On combine le théorème de la base incomplète et le procédé d'orthonormalisation.

Projection orthogonale

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle *projection orthogonale* (ou projecteur orthogonal) sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée le *projeté orthogonal* de x sur F.

Proposition. Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $x \in E$, alors

$$\forall y \in F, \quad y = p_F(x) \iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ (e_i \mid x - y) = 0.$$

Démonstration.
Le sens direct est évident : si $y = p_F(x)$, *alors* $x - y = x - p_F(x) \in F^\perp$.
Réciproquement, si $y \in F$ *vérifie* $\forall i,\ (e_i \mid x - y) = 0$, *alors* $x - y \in F^\perp$. *Or* $x = y + (x - y)$ *avec* $(y, x - y) \in F \times F^\perp$, *donc* $y = p_F(x)$.

Exemple. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, $(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $F = \mathrm{Vect}(1, X)$. Déterminer $p_F(X^2)$.
On a $p_F(X^2) = a + bX$ avec $(1 \mid X^2 - a - bX) = 0$ et $(X \mid X^2 - a - bX) = 0$, d'où $a = -\dfrac{1}{6}$ et $b = 1$, soit $p_F(X^2) = X - \dfrac{1}{6}$.

Proposition. Soit $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de E. Le projeté orthogonal sur F d'un vecteur $x \in E$ est :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\, e_i.$$

Exemple. Soit u un vecteur non nul de E. Alors $\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right)$ est une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(u)$ et donc :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \frac{(x \mid u)}{\|u\|^2}\, u.$$

V. Distance à un sous-espace vectoriel

(Voir aussi : https://youtu.be/TGgG-a54TIE)

Définition. Soit X une partie non vide de E et e un point de E. On appelle *distance de e à X* la quantité $d(e, X) = \inf\limits_{x \in X} d(e, x)$.

Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F et $x \in E$. La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$.

Ainsi : $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$**, et** $\forall y \in F$**,** $d(x, F) = \|x - y\| \iff y = p_F(x)$**.**

Démonstration.
Soit $x \in E$ et $y \in F$. On a $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$ avec $(x - p_F(x), p_F(x) - y) \in F^{\perp} \times F$.

D'après le théorème de Pythagore : $\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$.
Donc $\|x - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$, d'où $d(x, F) \geq \|x - p_F(x)\|$, or $d(x, F) \leq \|x - p_F(x)\|$.
Finalement : $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Étude d'un premier exercice classique.

a) Soit E un espace euclidien, F un sev de E et $x \in E$. Montrer que $\|u - p_F(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2$.

b) Calculer $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 \left(t^2 - a - bt\right)^2 \mathrm{d}t$.

Il s'agit du théorème de Pythagore : $\|u\|^2 = \|u - p_F(u) + p_F(u)\|^2$.

On a : $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 \left(t^2 - a - bt\right)^2 \mathrm{d}t = \left\|X^2 - p_F(X^2)\right\|^2$ avec $F = \mathrm{Vect}(1, X)$ et $(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$.

D'où, par le théorème de Pythagore :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - a - bt\right)^2 \mathrm{d}t = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|p_F(X^2)\right\|^2 = \frac{1}{180}.$$

Étude d'un deuxième exercice classique — Matrice de Gram.

Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E, on appelle *matrice de Gram* la matrice $G \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $G_{ij} = (x_i, x_j)$. On note $G(x_1, \ldots, x_p)$ le déterminant de cette matrice.

1. Démontrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$. *Indication.* Pour le sens $\Leftarrow$: si $G(x_1, \dots, x_p) = 0$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p, x_i) = 0$, d'où $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$.
2. On suppose désormais que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre et on note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Soit $x \in E$, démontrer que :
$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}.$$
Indication. Écrire $x = u + v$ avec $(u, v) \in F \times F^\perp$, remarquer que $d(x, F) = \|v\|$, montrer que $G(x, x_1, \dots, x_p)$ s'exprime en fonction de $G(v, x_1, \dots, x_p)$, justifier que $G(u, x_1, \dots, x_p) = 0$, et conclure.

Exercices

Exercice n°0

Démontrer que toute famille orthogonale finie de vecteurs **non nuls** de E est libre.

Exercice n°1

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(X)\, Q^{(k)}(X)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice n°2

Montrer que $\phi(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, (1 - t^2)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}\big([-1, 1], \mathbb{R}\big)$.

Exercice n°3

Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f, g \in E$, on pose $\phi(f, g) = f(0)\, g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

Exercice n°4 (oraux CCINP)

- On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par :
$$\varphi\,(A, A') = \mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$$
où $\mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$ est la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
- On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- On note
$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice n°5

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice n°6

(https://youtu.be/0q-ZYUUvy1A)

On considère $\mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$. Pour f strictement positive sur $[a,b]$, on pose $L(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $L(f) \geq (b-a)^2$. Étudier les cas d'égalité.

Exercice n°7 (oraux concours)

Soient n un entier naturel non nul et E un espace euclidien de dimension n. On suppose qu'il existe q vecteurs unitaires $u_1, \dots, u_q$ de E tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{q} \langle x, u_i \rangle^2.$$

Montrer que $(u_1, \dots, u_q)$ est une base orthonormale de E.

Exercice n°8

(https://youtu.be/Cpvgd5NVawY)

Soit $(x,y) \in E^2$. Montrer que x et y sont orthogonaux si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Exercice n°9

On définit $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ par $\phi(P,Q) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P\big(e^{i\theta}\big)\,\overline{Q(e^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta$.

- Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice n°10

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant $\forall x, y \in E,\ x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \lambda\,\|x\|$.

Exercice n°11

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la famille (u,v,w) où $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$, $w = (-1,1,0)$.

Exercice n°12

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E,\ (f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

- Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ est symétrique.
- Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice n°13

(Ce type d'exercices correspond davantage au chapitre Endomorphismes des espaces euclidiens.)

On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $B = (i, j, k)$. Former la matrice dans B de la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z = 0$.

Exercice n°14 (oraux CCINP)

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice n°15

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}.$$

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice n°16

Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E sur un sev F. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

(Indication. Pour l'une des implications, poser $x = u + \lambda v$, avec $u \in \ker(p)$ et $v \in \operatorname{Im}(p)$.)

Exercice n°17

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $B = (i, j, k)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$\operatorname{Mat}_B(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice n°18

Soient $n \geq 3$ un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

- Montrer que $\phi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
- Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \big(t^3 - (at^2 + bt + c)\big)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice n°19 (oraux concours)

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice n°20 (oraux concours)
(https://youtu.be/KLm6NyZoiIc)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que
$$\int_a^b h(x)\,dx = 0 \implies h = 0.$$
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On pose :
$$\forall (f, g) \in E^2, \quad (f \mid g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer
$$\int_0^1 \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$$
   en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice n°21

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. On considère les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par :
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 0 \text{ et } -x + 2y + 3z - t = 0\}$$
et $G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1, 0)\,;\,(2, 1, 1, -1)\big)$.

- Déterminer une base de $F^{\perp}$.
- Déterminer une base de $G^{\perp}$.

Exercice n°22
Soit E un espace euclidien de dimension n. On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. On note G l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

- Soit $a \neq 0_E$. Démontrer que $H_a = \{x \in E,\ (a,x) = 0\}$ est un hyperplan de E.
- Soit H un hyperplan de E. Démontrer qu'il existe $a \in E$, $a \neq 0_E$, tel que $H = H_a$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \neq 0_E$ pour que $H_a = H_b$.
- Pour $a \in E$, on note $\varphi_a(x) = (a,x)$ de sorte que $\varphi_a \in G$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_a = \varphi_b$.
- En déduire que l'application $a \mapsto \varphi_a$ de E dans G est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice n°23
On considère $E = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.

- Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
- En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice n°24
Soit E un espace vectoriel euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux. Démontrer que :

$$\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q) \iff \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|q(x)\|.$$

Exercice n°25
On munit $M_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par

$$\langle M \mid N \rangle = \mathrm{Tr}(M^\top \times N).$$

Soient $x \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,x - 1 & 4 \\ -2 & \mathrm{sh}\,x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,x + 1 & 3 \\ 6 & -\mathrm{sh}\,x \end{pmatrix}.$$

1. A-t-on $\langle A \mid B \rangle = 0$?
2. Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $M_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la distance de A à l'espace des symétriques.