Chapitre 7 : Calcul différentiel (2)

M. Calciano

Le plan de l'ensemble du chapitre est le suivant :
— **Fonctions numériques** (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$)
— **Fonctions de classe** C^1 (généralisation du cas $n=2$ ou $n=3$ à n quelconque)
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I. Fonctions numériques de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Dérivée selon un vecteur

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a\in\Omega$ et h un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$ (attention : h n'est pas a priori un scalaire).

On pose $\varphi_h(t)=f(a+th)$.

Définition 1.1. On dit que f est **dérivable en** a **selon le vecteur** h lorsque φ_h est dérivable en 0. On pose alors :

$$D_hf(a)=\varphi_h'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}.$$

Ce scalaire (ou vecteur si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$) est appelé la **dérivée de** f **en** a **selon le vecteur** h.

Exemple. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=xy^2$. Calculons $D_{(a,b)}f(1,1)$.

On construit $\varphi_{(a,b)}(t)=f(1+ta,1+tb)=(1+ta)(1+tb)^2$, d'où :

$$\frac{f(1+ta,1+tb)-f(1,1)}{t}=\frac{(1+ta)(1+2tb+t^2b^2)-1}{t}=(2b+a)+(2ab+b^2)t+ab^2t^2.$$

Cette quantité admet une limite en 0, et $D_{(a,b)}f(1,1)=a+2b$.

Dérivées partielles

Définition 1.2. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base fixée de $\mathbb{R}^n$ et $j\in\{1,\dots,n\}$. On dit que f admet une **dérivée partielle en** a **selon la** j**-ième variable** (ou selon x_j) lorsque f admet une dérivée en a selon le vecteur e_j. On note :

$$D_jf(a)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}.$$

Remarque. Malheureusement, cette définition ne suffit pas : une fonction peut admettre des dérivées selon tout vecteur en un point sans être continue en ce point. Par exemple, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ y & \text{sinon,}\end{cases}$$

admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, $f(t^3,t)=\frac{1}{t}\to\infty$ lorsque $t\to 0$.

Exemple. Dans la pratique, le calcul d'une dérivée partielle revient à considérer les autres variables comme des constantes. Ainsi, pour $f(x,y) = x^3 + 2x^4y^3 + 5y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 8x^3y^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^4y^2 + 5.$$

Règles de calcul des dérivées partielles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, f et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en a. Alors :

— $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ admet des dérivées partielles en a et $\dfrac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_j} = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \beta \dfrac{\partial g}{\partial x_j}$.

— fg admet des dérivées partielles en a et $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)g(a) + f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(a)$.

— Si f ne s'annule pas, $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial x_j}(a) = -\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)/f^2(a)$.

— Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et $f(\Omega) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ admet des dérivées partielles en a et $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_j}(a) = \varphi'(f(a))\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Fonctions de classe C^1

Définition 1.3. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite **de classe** C^1 si ses dérivées partielles existent en tout point de Ω et si les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues sur Ω.

Développement limité à l'ordre 1

Notation. Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$). On écrit $\varphi(h) = o(\|h\|^k)$ au voisinage de 0 s'il existe $E : \Omega \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 telle que $\varphi(h) = \|h\|^k E(h)$.

Théorème 1.4. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, C^1. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point $a \in \Omega$:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|).$$

Corollaire 1.5. Si f est C^1 sur Ω, alors f est continue.

Démonstration. *Conséquence directe de l'existence du DL à l'ordre 1.* □

Différentielle

Définition 1.6. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, C^1, et $a \in \Omega$. La **différentielle de f en** a, notée $\mathrm{d}f(a)$, est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$h \longmapsto \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Remarque. Par abus de langage (analogie avec le produit scalaire), on note $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ plutôt que $\mathrm{d}f(a)(h)$.

Règles de calcul des différentielles

Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, C^1. Alors :
- $\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \,\mathrm{d}f(a) + \beta \,\mathrm{d}g(a)$.
- $\mathrm{d}(fg)(a) = \mathrm{d}f(a)\, g(a) + f(a)\, \mathrm{d}g(a)$.
- Si f ne s'annule pas : $\mathrm{d}(1/f)(a) = -\,\mathrm{d}f(a)/f^2(a)$.
- Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est C^1 et $f(\Omega) \subset I$: $\mathrm{d}(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a))\,\mathrm{d}f(a)$.

Démonstration. *Pour la composition : les dérivées partielles de $\varphi \circ f$ existent et $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_j} = (\varphi' \circ f)\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, qui est continue car produit de fonctions continues.* □

Exemple. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g(x, y) = f(x^2 + xy + y^2)$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Alors g est C^1 et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (2x + y)f'(x^2 + xy + y^2), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (2y + x)f'(x^2 + xy + y^2).$$

Règle de la chaîne

Théorème 1.7. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 et $x_1, \ldots, x_n$ des fonctions dérivables sur I telles que $\forall t \in I$, $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \Omega$. Alors la fonction $g : t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ est dérivable sur I et :

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Remarque. De façon équivalente : si $\gamma : I \to \Omega$ est dérivable et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est C^1, alors $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe

Théorème 1.8. Soit Ω un ouvert convexe non vide. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est C^1 et $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration. *($\Rightarrow$) Si f est constante, elle est C^1 et toutes ses dérivées partielles sont nulles.*

($\Leftarrow$) Soient $a, b \in \Omega$. Posons $\gamma(t) = (1 - t)a + tb$, C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans Ω (par convexité). Alors $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, donc $f \circ \gamma$ est constante et $f(a) = f(b)$. □

Extrema

Gradient

On suppose ici que E est un espace euclidien.

Définition 1.9. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. La différentielle $\mathrm{d}f(a)$ est une forme linéaire sur E, donc il existe un unique vecteur de E, noté $\operatorname{grad} f(a)$, tel que :

$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = \big(\operatorname{grad} f(a) \mid h\big).$$

Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E, alors $\operatorname{grad} f(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, e_i$ (noté aussi $\nabla f(a)$).

Exercice n°1

Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ (avec E espace euclidien de dimension finie).

1. Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.
2. Montrer que $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\operatorname{grad} f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$.

Pour $x \neq 0$ et $h \in E$:

$$\|x+h\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid h) + \|h\|^2,$$

donc $f(x+h) = f(x)\Big(1 + \dfrac{2(x\mid h)}{\|x\|^2} + \dfrac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\Big)^{1/2}$. Or $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$, d'où :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{(x\mid h)}{\|x\|} + o(\|h\|),$$

ce qui montre que f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et que $\operatorname{grad} f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$.

Extrema locaux

Définition 1.10. La fonction f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en $a \in U$ lorsque :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in B(a,r) \cap U, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

Définition 1.11. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On dit que a est un **point critique** de f si $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Théorème 1.12. Soit f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, différentiable en $a \in U$. Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

Démonstration. *Supposons que f admette un maximum local en a. Comme U est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a,\eta) \subset U$ et $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in B(a,\eta)$.*

Soit $h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ et $\varphi : t \mapsto f(a+th)$, définie sur $\left]-\frac{\eta}{\|h\|}, \frac{\eta}{\|h\|}\right[$. La fonction φ admet un maximum en 0, est dérivable en 0 (car f est C^1), donc $\varphi'(0) = \mathrm{d}f(a)(h) = 0$. Comme cela vaut pour tout $h \neq 0$, on conclut $\mathrm{d}f(a) = 0$. □

Exemple. Déterminons les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \mapsto 3x + x^2 + xy + y^2$.

f est polynomiale, donc continue. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, tout extremum ne peut être atteint qu'en un point critique. On résout :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 + 2x + y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y = 0 \end{cases} \implies (x,y) = (-2,1).$$

En ce point : $f(-2+h, 1+k) = f(-2,1) + h^2 + hk + k^2 = f(-2,1) + \left(h + \dfrac{k}{2}\right)^2 + \dfrac{3k^2}{4} \geq f(-2,1)$.

Donc $(-2,1)$ est un **minimum global**. Il n'y a pas de maximum global car $f(0,t) = t^2 \to +\infty$.

II. Fonctions de classe C^2

Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 2.1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$. Lorsqu'elle existe, la fonction $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ est notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ quand $i = j$).

Définition 2.2. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite **de classe** C^2 si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont définies et C^1.

Théorème 2.3. Si f est C^2, alors f est C^1.

Démonstration. *Si f est C^2, toutes les dérivées partielles existent et sont C^1, donc continues.* □

Opérations algébriques

Les combinaisons linéaires, produits, inverses (si $f \neq 0$) et compositions $\varphi \circ f$ de fonctions C^2 sont C^2 (mêmes règles qu'en C^1).

Théorème de Schwarz (admis)

Théorème 2.4 (Schwarz)**.** Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Exercice n°2

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2. Montrer l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
3. Conclure.

Pour $x \neq 0$: $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

On calcule ensuite $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pour $y \neq 0$ et l'on trouve $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. Un calcul analogue donne $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

Ces dérivées croisées étant différentes, le théorème de Schwarz implique que f n'est **pas** C^2.

Développement limité à l'ordre 2 (admis)

Théorème 2.5. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in \Omega$. Au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a)\, h + o(\|h\|^2),$$

où $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}$ est la **matrice hessienne** de f en a (symétrique d'après Schwarz).

III. Cadre général : applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Applications différentiables

Lemme 3.1. Soit $a \in U$. S'il existe une application linéaire $L_a \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|),$$

alors L_a est **unique**. On l'appelle **application linéaire tangente à f en a**.

Démonstration. *Supposons $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant toutes deux la relation. Alors $(L_1 - L_2)(h) = o(\|h\|)$. Pour $x \in E$ fixé et $t \to 0$:*

$$\frac{(L_1 - L_2)(tx)}{\|tx\|} = \frac{(L_1 - L_2)(x)}{\|x\|} \xrightarrow[t \to 0]{} 0,$$

donc $(L_1 - L_2)(x) = 0$ pour tout x, et $L_1 = L_2$. □

Définition 3.2. On dit que f est **différentiable en a** lorsque les conditions du lemme précédent sont remplies. L'application linéaire tangente est notée $\mathrm{d}f(a)$ et appelée **différentielle de f en a** :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|).$$

Exemples.
- Pour f à une variable réelle : $\mathrm{d}f(a)(h) = h\, f'(a)$.
- Si f est la restriction à un ouvert U d'une application linéaire de E dans F, alors $\mathrm{d}f(a) = f$ pour tout $a \in U$.

Propriétés des applications différentiables

Proposition 3.3. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. *Il existe $L_a \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(a+h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$. Comme L_a est continue en dimension finie, $L_a(h) \to 0$ quand $h \to 0$, donc $f(a+h) \to f(a)$.* □

Proposition 3.4. Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées selon tout vecteur h, et $D_h f(a) = \mathrm{d}f(a)(h)$.

Démonstration. *Soit $\gamma : t \mapsto a + th$, à valeurs dans Ω au voisinage de 0 (car Ω est ouvert). Alors $D_h f(a) = (f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(a) \cdot \gamma'(0) = \mathrm{d}f(a)(h)$.* □

Proposition 3.5 (Combinaison linéaire)**.** Si $f, g : U \to F$ sont différentiables en a et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \,\mathrm{d}f(a) + \mu \,\mathrm{d}g(a).$$

Théorème 3.6 (Règle de la chaîne)**.** Soit $f : U \to V$ différentiable en $a \in U$ (où $U \subset E$, $V \subset F$ ouverts) et $g : V \to G$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

Proposition 3.7. Soit $B : F_1 \times F_2 \to G$ une application bilinéaire. Si $f : U \to F_1$ et $g : U \to F_2$ sont différentiables en a, alors $B(f, g)$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}\big(B(f,g)\big)(a)(h) = B(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a)(h)).$$

Proposition 3.8. Soit $f : U \to F$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de F. En notant $f = \sum_{i=1}^{n} f_i b_i$, f est différentiable en a si et seulement si chaque f_i est différentiable en a, et dans ce cas :

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \big(\mathrm{d}f_1(a)(h), \ldots, \mathrm{d}f_n(a)(h)\big).$$

Matrice jacobienne

Définition 3.9. Soit $f : U \to F$ de classe C^1 avec $U \subset E$. Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (b_1, \ldots, b_n)$ des bases de E et F. La **matrice jacobienne** de f en a, notée $J_f(a)$, est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans ces bases :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Si $E = F = \mathbb{R}^n$, le **jacobien** $j_f(a) = \det J_f(a)$.

Proposition 3.10. Si $g : V \to G$ est différentiable en $f(a)$ et $f : U \to V$ est différentiable en a, alors :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a), \qquad j_{g \circ f}(a) = j_g(f(a)) \cdot j_f(a).$$

Exemples.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x + y)$. Les dérivées partielles existent et sont continues, donc f est C^1. Sa jacobienne est $J_f = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\varphi : \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta)$. La jacobienne est $J_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

Applications de classe C^1

Définition 3.11. $f : U \to F$ est dite **continûment différentiable** ou **de classe** C^1 sur U si elle est différentiable sur U et si $\mathrm{d}f$ est continue sur U.

Théorème 3.12. f est de classe C^1 sur U si et seulement si les dérivées partielles de f (relativement à une base de E) existent en tout point de U et sont continues sur U.

Proposition 3.13. Les fonctions de classe C^1 de U dans F forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^1(U, F)$. La composée de deux fonctions C^1 est C^1. Les polynômes sont C^1 sur $\mathbb{R}^n$; les fractions rationnelles sont C^1 sur leur ensemble de définition.

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe C^k

Définition 3.14. Soit $k \geq 1$. La fonction $f : U \to F$ est dite **de classe** C^k sur U si elle admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k par rapport à toutes les variables, et si ces dérivées sont continues sur U.

Elle est dite C^∞ si elle est C^k pour tout $k \geq 1$.

Proposition 3.15. f est C^k sur U si et seulement si f est C^1 et ses dérivées partielles sont C^{k-1} sur U.

Théorème 3.16 (Schwarz, cas général — admis)**.** Soit $f : U \to F$ de classe C^2 sur U. Alors pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ et tout $a \in U$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Plus généralement, pour f de classe C^k, les dérivées partielles d'ordre k ne dépendent pas de l'ordre de dérivation.

Formule de Taylor-Young (admis)

Théorème 3.17. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, $a \in U$. On note $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Lorsque $h = (h_1, h_2) \to 0$:

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}(r h_1^2 + 2 s h_1 h_2 + t h_2^2) + o(\|h\|^2).$$

Recherche des extrema locaux d'une fonction de deux variables

Voir aussi : https://youtu.be/HI9b8-Sfp40

Théorème 3.18. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Soit a un **point critique** de f. On pose $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f admet un **minimum local** en a.
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f admet un **maximum local** en a.
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f n'admet pas d'extremum en a (**point selle**).
- Si $rt - s^2 = 0$, le théorème ne permet pas de conclure.

Démonstration. *Au voisinage de a, comme a est critique :*

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(r h_1^2 + 2 s h_1 h_2 + t h_2^2) + o(\|h\|^2) = \frac{1}{2} h^T J \, h + o(\|h\|^2),$$

avec $J = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ symétrique réelle. La matrice J est diagonalisable avec valeurs propres α, β vérifiant $\det(J) = rt - s^2 = \alpha\beta$.

Si $rt - s^2 > 0$, alors α et β sont de même signe. Si de plus $r = \operatorname{tr}(J)/2 > 0$, elles sont positives, J est définie positive, et $h^T J h \geq 0$ avec égalité ssi $h = 0$: c'est un minimum. On traite les autres cas de façon analogue. □

Exercice n°

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. Montrer que f admet $(0, 3)$ comme minimum local.

Vecteur tangent et plan tangent

Définition 3.19. Soit $X \subset E$ et $x \in X$. On dit que $v \in E$ est **tangent à X en x** s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, dérivable en 0, à valeurs dans X, tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Exemple. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable, et $X = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$. Les vecteurs tangents à X en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sont les $(a, 0, a\,\partial_x f) + (0, b, b\,\partial_y f)$. Le **plan tangent à X en M_0** a pour équation :

$$(X - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - (Z - z_0) = 0.$$

Exemple.[Exercice classique] Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3$. La surface S est l'ensemble $\{f = 0\}$. Vérifier que l'équation du plan tangent à S en $(1, 1, 1)$ est $x - 5y + 2z + 2 = 0$.

Proposition 3.20. Soit E euclidien, $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable, $k \in f(U)$ et $X = \{M \in U, f(M) = k\}$. En tout point $x \in X$, les vecteurs tangents à X sont orthogonaux à $\operatorname{grad} f(x)$.

IV. Expression du gradient en coordonnées polaires

Définition 4.1. L'application $\varphi :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\to V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$, $(\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est de classe C^1. On appelle **repère polaire** le repère $(O, \mathbf{u}(\theta), \mathbf{v}(\theta))$ où :

$$\mathbf{u}(\theta) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2, \qquad \mathbf{v}(\theta) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2.$$

Théorème 4.2. Si f est C^1 sur un ouvert $\Omega \subset V$ et $F = f \circ \varphi$, alors :

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial F}{\partial \rho}\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\mathbf{v}.$$

Démonstration. *Exercice faisant appel à la règle de la chaîne.* □

V. Difféomorphismes

Définition 5.1. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts et $k \geq 1$. On dit que f est un **C^k-difféomorphisme** de U sur V si f est une bijection de U sur V, f est C^k et f^{-1} est C^k.

Changement de variables

Théorème 5.2 (admis)**.** Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Pour toute fonction f intégrable sur V :

$$\int_V f(y)\, \mathrm{d}\lambda(y) = \int_U f(\varphi(x))\, |\det J_\varphi(x)|\, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Exemple. Retrouver $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'intégrale double $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et le passage en coordonnées polaires (théorème de Fubini).

Exercice n°3
Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$. Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$ par passage en coordonnées polaires.

En posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $0 \leq r \leq 1$ et $\theta \in [0,\pi/2]$, on obtient après calculs : $I = \dfrac{\pi \ln 2}{4}$.

Proposition 5.3. Si f est un C^k-difféomorphisme de U sur V et $b = f(a)$, alors $\mathrm{d}f(a)$ est un isomorphisme vérifiant $(\mathrm{d}f(a))^{-1} = \mathrm{d}(f^{-1})(b)$.

Démonstration. $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_V$ *implique* $\mathrm{d}f(a) \circ \mathrm{d}(f^{-1})(b) = \mathrm{Id}_F$. □

Remarque. L'existence d'un C^k-difféomorphisme de U sur V implique $\dim E = \dim F$.

Théorème 5.4 (admis)**.** Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$ injective de classe C^k. Alors $f(U)$ est un ouvert et f est un C^k-difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si $\mathrm{d}f(a)$ est inversible pour tout $a \in U$.

VI. Applications aux équations aux dérivées partielles

Exemple.[Exercice] Soit $a \in \mathbb{R}$. On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = a. \tag{E}$$

1. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2}\right)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $g(u,v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2}\right)$. Montrer que g est C^1.
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g vérifie $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{a}{2}$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. En déduire toutes les solutions de (E).

VII. Théorème de Poincaré (hors programme)

Définition 7.1. Une forme différentielle ω définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dite **exacte** s'il existe $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$.

Elle est dite **fermée** si $\omega = \sum_i \omega_i\,\mathrm{d}x_i$ est de classe C^1 et vérifie $\dfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$ pour tout (i,j).

Un ouvert U est **étoilé** s'il existe un point $x_0 \in U$ tel que pour tout $x \in U$, le segment $[x_0, x]$ reste dans U.

Théorème 7.2 (Poincaré — admis)**.** Sur un ouvert étoilé, toute forme différentielle fermée est exacte.

Exercices

Exercice n°1 *(Oraux de concours)* On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3.$$

1. Montrer que f admet un point critique, mais que ce n'est pas un extremum.
2. Montrer que f possède sur le disque fermé unité un maximum et un minimum.

Exercice n°2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, montrer l'existence et calculer $D_{(u,v)}f(0,0)$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, calculer $f(t,t^2)$.
3. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice n°3
Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$. Montrer que f admet un prolongement de classe C^1 à $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°4
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$, une fonction de classe C^1. On pose $g(x,y) = f(x+y, xy)$. Calculer en tout point (x,y) les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exercice n°5 *(Oraux de concours)*
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.

1. Justifier que f est C^1.
2. Déterminer la différentielle de f en tout point $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier que $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$, $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\,\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\,\|A\|$ (norme subordonnée au produit scalaire précédent).
4. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \mathrm{tr}(M^3)$. Justifier que f est C^1 et déterminer sa différentielle en tout point M.

Exercice n°6
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^3 - xy$ possède-t-elle un extremum en $(0,0)$?

Exercice n°7
Soit (S) la surface d'équation $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. Déterminer l'équation du plan tangent à (S) au point $A\left(1, 3, \dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice n°8
On définit sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1. Vérifier que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.
2. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$. Calculer de deux façons $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\cos t, \sin t)\ \mathrm{d}t$ et aboutir à une contradiction.

Exercice n°9
Soit $\varphi : M \mapsto M^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ est C^1 sur $GL_n(\mathbb{R})$.
   a) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$, montrer que $(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij}$.
   b) Déterminer $(I_n + tE_{ii})^{-1}$.
   c) En déduire $\mathrm{d}\varphi(I_n)(E_{ij}) = -E_{ij}$, puis $\mathrm{d}\varphi(I_n)(A) = -A$.
3. Déterminer $\mathrm{d}\varphi(M)$ pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice n°10
On pose $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2 - 2xy,\ y)$.

1. Montrer que U est un ouvert.
2. Montrer que f est injective.
3. Préciser $V = f(U)$ et montrer que V est un ouvert.
4. Montrer que f est bijective de U sur V.
5. Montrer que f est C^1 sur U et que sa bijection réciproque g est C^1 sur V.
6. Donner la différentielle de g au point $(u,v) \in V$.

Exercice n°11
Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$. On cherche toutes les fonctions f de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2.$$

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, xy)$. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de U sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.
3. En posant $g(u,v) = f \circ \varphi^{-1}(u,v)$, résoudre le problème.

Exercice n°12
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha.$$

On utilise le changement de variables $u = 2x + y$, $v = 2x - y$.

1. Montrer que $\varphi : (x,y) \mapsto (2x+y, 2x-y)$ est un C^2-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. En posant $g(u,v) = f\left(\dfrac{u+v}{4}, \dfrac{u-v}{2}\right)$, déterminer E.

Exercice n°13
Soit $\Omega = \mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$. Déterminer toutes les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

1. Montrer que $\varphi : (u,v) \mapsto (ue^v, e^{-v})$ est un C^1-difféomorphisme de Ω sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice n°14
Soit $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ u - v > 0\}$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto (u^2+v^2, u+v)$. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de U sur un ouvert V à préciser.

Exercice n°15
Soit $\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x+z^2,\ y+x^2,\ z+y^2)$.

1. Montrer que φ est un C^2-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. En notant x, y, z les composantes de φ^{-1}, calculer $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial x}{\partial v}$.

Exercice n°16 *(Oraux de concours — à traiter en séance)*

Exercice n°17 *(Oraux de concours — à traiter en séance)*

Exercice n°18
Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite **harmonique** si $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Elle est dite **radiale** sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$.

1. Montrer que si f est C^3 et harmonique, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. Montrer que si f est C^3 et harmonique, alors $h : (x,y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est harmonique.

a) Montrer que si f est C^2 et radiale, alors φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

b) En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.

Exercice n°19
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. On note S la sphère unité et B la boule unité ouverte. On suppose que f est constante sur S. Démontrer l'existence de $x_0 \in B$ tel que $\mathrm{d}f(x_0) = 0$.

Exercice n°20
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice n°21
Justifier que la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice n°22
Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. En quels points l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est-elle différentiable ?
2. Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice n°23

Montrer que l'application $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \, \mathrm{d}t$ définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice n°24

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E.

1. Montrer que $x \mapsto (u(x), x)$ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
2. Montrer que $F : x \mapsto \dfrac{(u(x), x)}{(x, x)}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.

Exercice n°25

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, croissante, vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On pose $F(x) = f(\|x\|)\, x$.

1. Montrer que $N : x \mapsto \|x\|$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et exprimer sa différentielle.
2. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.
3. Montrer que $\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(\,\mathrm{d}F(x)(h), h) \geq f(\|x\|)\|h\|^2$.

a) Montrer que F est injective (montrer que $t \mapsto t\, f(t)$ est croissante).

b) Montrer que F est surjective (appliquer le TVI à $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \|F(ty)\|$).

Exercice n°26

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y < 2x \text{ et } x < y^2 < 2x\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ à l'aide du changement de variables $u = \dfrac{x}{y}$, $v = \dfrac{y^2}{x}$.

Exercice n°27 https://youtu.be/1KOrE_vAdyk

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$.

1. Démontrer que f est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Calculer la matrice jacobienne de f en (x_0, y_0).
3. Est-ce que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?