Les probabilités

M. Calciano

Une expérience aléatoire est un procédé donnant des résultats dépendant du hasard ou pouvant s'y assimiler. L'ensemble des résultats possibles est appelé l'univers et se note Ω.

Chaque élément de Ω est une éventualité ou une issue. Un événement est un ensemble d'éventualités.

Dans le secondaire, les probabilités ont été étudiées lorsque Ω était un ensemble fini. Nous allons généraliser avec, entre autres, Ω dénombrable.

I. Généralités

1) Tribu

a) Définition

On appelle **tribu sur** Ω une partie τ de $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω) telle que :

- $\Omega \in \tau$;
- si $A \in \tau$, alors $\complement_\Omega A = \Omega \setminus A \in \tau$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \tau$.

b) Propriétés

Soit τ une tribu, alors : $\varnothing \in \tau$, et une intersection finie ou dénombrable d'éléments de τ est dans τ.

Démonstration : *Il suffit de reprendre l'axiomatique des tribus : $\varnothing = \complement_\Omega \Omega \in \tau$ d'après le premier et le deuxième axiome. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}}$, alors par les lois de De Morgan,*

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \complement_\Omega \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \complement_\Omega A_n \right) \in \tau,$$

car chaque $\complement_\Omega A_n \in \tau$ par le deuxième axiome, leur réunion est dans τ par le troisième, et son complémentaire est encore dans τ par le deuxième. Le cas d'une intersection finie s'obtient en complétant la famille par Ω à partir d'un certain rang. ■

Exemples :

- Pour toute partie A de Ω : $\{\Omega, A, \complement_\Omega A, \varnothing\}$ est une tribu.
- L'ensemble des parties de Ω, noté $\mathcal{P}(\Omega)$, est une tribu sur Ω, appelée **tribu discrète**.

c) Tribu engendrée

Lorsque Ω est fini ou dénombrable, la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$ convient toujours. La situation est différente lorsque Ω est infini non dénombrable (typiquement $\Omega = \mathbb{R}$), et il est légitime de se demander *quelle* tribu choisir. On répond à cette question grâce à la notion de tribu engendrée.

Définition : Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ (une famille quelconque de parties de Ω). On appelle **tribu engendrée par** $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{C}$:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\tau \text{ tribu sur } \Omega \\ \mathcal{C} \subset \tau}} \tau.$$

Démonstration : *Cette définition a un sens car une intersection quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu sur Ω (les trois axiomes se vérifient immédiatement sur l'intersection), et il existe toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{C}$, à savoir $\mathcal{P}(\Omega)$.* ■

d) Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$

Pourquoi ne pas choisir simplement, lorsque $\Omega = \mathbb{R}$, l'ensemble τ des ouverts de $\mathbb{R}$ comme tribu ? La raison est simple : **les ouverts de $\mathbb{R}$ ne forment pas une tribu.** En effet :

- le complémentaire d'un ouvert n'est en général pas un ouvert : $\complement_{\mathbb{R}}\,]0,1[\,=\,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$ n'est pas ouvert (le deuxième axiome échoue) ;
- une intersection dénombrable d'ouverts n'est en général pas un ouvert : $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \{0\}$ n'est pas ouvert (le troisième axiome, appliqué aux complémentaires, échoue également).

On choisit donc plutôt la tribu *engendrée* par les ouverts de $\mathbb{R}$ (ce qui revient au même que de la prendre engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$, puisque tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts). Cette tribu, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, est appelée **tribu borélienne sur** $\mathbb{R}$, et ses éléments sont appelés **boréliens**. Par construction, elle contient tous les intervalles, tous les ouverts, tous les fermés, ainsi que toutes les réunions et intersections dénombrables que l'on peut en former : elle est largement suffisante pour exprimer tous les événements usuels d'une variable aléatoire réelle (du type $\{X \leqslant x\}$, $\{X \in I\}$, etc.).

Remarque : on ne choisit pas non plus la tribu discrète $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tout entière. Ce n'est pas un simple excès de prudence : on peut montrer (à l'aide de l'axiome du choix) qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$, comme l'ensemble de Vitali, pour lesquelles *aucune* probabilité invariante par translation ne peut être définie de façon cohérente. La tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ réalise ainsi le bon compromis : assez grosse pour contenir tous les événements usuels, assez petite pour qu'une probabilité puisse y être définie.

e) Définition

Un couple (Ω, τ), avec τ une tribu sur Ω, s'appelle **espace probabilisable**.

2) Probabilité

Une probabilité sur (Ω, τ) est une application P définie sur τ, à valeurs positives, qui vérifie :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet (Ω, τ, P) s'appelle **espace probabilisé**.

Remarque : une tribu est un modèle d'ensemble regroupant les événements.

- Dans le cas où Ω est fini, on choisira toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu.
- Si Ω est dénombrable (typiquement $\Omega = \mathbb{N}$), on choisira là encore $\mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu.
- Si Ω est infini non dénombrable (typiquement $\Omega = \mathbb{R}$), on ne prendra pas $\mathcal{P}(\Omega)$, ce qui engendrerait une tribu trop grosse (il n'est en fait pas possible de définir une application vérifiant les trois axiomes des probabilités sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tout entier), mais la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$.

3) Propriétés des probabilités

Soit P une probabilité sur (Ω, τ), alors :

- $P(\varnothing) = 0$;
- $P(\complement_\Omega A) = 1 - P(A)$;
- P est à valeurs dans $[0, 1]$;
- pour toute famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles $(A_i)_{i \in I}$, la famille $(P(A_i))_{i\in I}$ vérifie $P\left(\coprod_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$;
- si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$;
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration : *Soit la suite d'événements $A_n = \varnothing$ pour tout n, alors les événements sont deux à deux incompatibles, donc $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$, or $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \varnothing$, donc si la série de terme constant $P(A_n)$ converge, c'est que $P(A_n) = 0$, donc $P(\varnothing) = 0$.*

On a : $P(\complement_\Omega A \cup A) = P(\Omega) = 1$, or $\complement_\Omega A$ et A sont incompatibles donc $P(\complement_\Omega A \cup A) = P(\complement_\Omega A) + P(A) = 1$.

Par définition P est à valeurs positives, de plus $P(\complement_\Omega A) = 1 - P(A) \geqslant 0$ donc $P(A) \leqslant 1$.

Si $A \subset B$ alors B est la réunion des événements incompatibles A et $B\setminus A$, donc $P(B) = P(A) + P(B\setminus A)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$ et $P(B) = P(A\cap B) + P(B\setminus A)$, d'où $P(B\setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. ■

4) Théorème de continuité croissante

Si (A_n) est une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

De même, si (A_n) est une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

Démonstration : *On pose $A_{-1} = \varnothing$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.*

On montre que $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ et $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$.

De plus, les événements B_n sont incompatibles, donc

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(B_k),$$

or $\sum_{k=0}^{n} P(B_k) = P(A_n)$. ■

Exemple : on lance un dé classique une infinité de fois et on souhaite déterminer :

- la probabilité de l'événement A : « n'obtenir que des 6 » ;
- la probabilité de l'événement B : « obtenir au moins un 6 ».

Soit F_i : « On obtient un 6 au i-ème lancer ».

Alors $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ et $P(A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

(on utilise l'indépendance des lancers !).

Et $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$, or ici les événements ne sont pas indépendants. On passe par le complémentaire :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \complement F_i\right) \longrightarrow 1.$$

5) Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque : si A et B sont indépendants, il en va de même de $\complement_\Omega A$ avec B, etc.

Soit $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements, on dit qu'ils sont mutuellement indépendants si, pour toute partie finie J de I, on a :

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

Étude d'un exemple : Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard. On définit les événements : A : « tirage d'un nombre pair » et B : « tirage d'un multiple de 3 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Même question avec 13 boules.

6) Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements avec $P(B) > 0$, le réel $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ s'appelle la **probabilité de A sachant que B a été réalisé**.

Inversion des conditionnements : Soient A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$ alors,

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A)P(B\,|\,A)}{P(B)}.$$

7) Formule des probabilités composées

Soit $(A_n)_{n\in I}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2\,|\,A_1) \times \cdots \times P(A_n\,|\,A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Une suite $(A_n)_{n\in I}$ d'événements s'appelle un **système complet d'événements** lorsque, si $n \neq p$, $A_n \cap A_p = \varnothing$, $\forall n \in I,\ A_n \neq \varnothing$, et la réunion des A_n est égale à Ω.

Démonstration : *Par récurrence sur n.* ■

8) Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements, alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n).$$

Démonstration : *$B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$, or les événements sont incompatibles, donc la σ-additivité de P conclut.* ■

Étude d'un exercice « classique » : Un fumeur décide d'arrêter de fumer. D'après des statistiques, on estime que si cette personne n'a pas fumé le n-ème jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est de $0,3$. Mais si elle a fumé le n-ème jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est de $0,9$.

Pour n entier, on note F_n l'événement « la personne fume le n-ème jour », et p_n la probabilité de F_n. On pose $p_0 = 1$.

Démontrer que $p_{n+1} = -0,6\,p_n + 0,7$. La personne va-t-elle arrêter de fumer ?

9) Formule de Bayes

Soit I un ensemble fini d'indices ou dénombrable, $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements avec, pour tout n, $P(A_n) > 0$. Alors :

$$P(A_k \,|\, B) = \frac{P(A_k)\,P(B\,|\,A_k)}{\sum_{i\in I} P(A_i)\,P(B\,|\,A_i)}.$$

Démonstration : *Il suffit de vérifier que* $P(A_k\,|\,B)\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)P(B\,|\,A_i) = P(A_k)P(B\,|\,A_k)$. ■

II. Variables aléatoires

On travaille à présent sur l'espace probabilisé : (Ω, τ, P).

1) Variable aléatoire discrète et loi de probabilité associée

a) Définition

Soit E un ensemble, une variable aléatoire discrète X sur (Ω, τ) est une application définie sur Ω à valeurs dans E, dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ soit dans τ.

Exemple : on jette deux dés, on pose $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On peut définir la variable aléatoire X telle que $X(a, b) = a + b$.

Remarques :

- Le terme « variable aléatoire » est trompeur car X est une fonction, pas une variable !
- X n'a rien d'aléatoire car la notion de probabilité n'entre même pas dans sa définition !
- Pour tout x de E, $\{X \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant x\} \in \tau$.

b) Définition

Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, τ, P) telle que $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$, alors la loi de probabilité de X est la suite $(p_n)_{n\in I}$ définie par $p_n = P(X = x_n)$.

c) Théorème

Si une variable aléatoire discrète sur (Ω, τ), X, prend ses valeurs dans $\{x_n, n \in I\}$, avec les x_n distincts, et si $(p_n)_{n\in I}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{n\in I} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur (Ω, τ) telle que $P(X = x_n) = p_n$.

Démonstration : *Considérer :* $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1],\ A \mapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega$, *et vérifier que* P *est bien une probabilité.* ■

Exemple : soit $\lambda > 0$, pour tout entier naturel n, on définit $p_n = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

On a $p_n \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Donc (p_n) correspond bien à une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$.

d) Définition

La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X sur (Ω, τ) est la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

e) Théorème

La fonction de répartition est une fonction positive, croissante, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Démonstration : *Comme* $F_X(x) = P(X \leqslant x)$, *et* P *à valeurs positives,* F_X *est à valeurs positives. Soit* $x \leqslant y$, $P(X \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant y)$, *car* $X^{-1}(]-\infty, x]) \subset X^{-1}(]-\infty, y])$. ■

2) Couples de variables aléatoires discrètes indépendantes

a) Définition

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, τ, P), alors (X, Y) est **un couple de variables aléatoires indépendantes** lorsque, pour tout élément $(x_i; y_j)$ de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

b) Théorème

Si X et Y sont indépendantes alors, pour toute partie A de $X(\Omega)$ et toute partie B de $Y(\Omega)$, on a : $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Démonstration : $A = \bigcup_{i \in I}\{x_i\}$ *et* $B = \bigcup_{j \in J}\{y_j\}$, *donc*

$$\begin{aligned} P(X \in A, Y \in B) &= \sum_{\substack{x_i \in A \\ y_j \in B}} P(X = x_i)P(Y = y_j) \\ &= \left(\sum_{x_i \in A} P(X = x_i)\right)\left(\sum_{y_j \in B} P(Y = y_j)\right) = P(X \in A)P(Y \in B). \end{aligned}$$

■

c) Théorème

Si X et Y sont indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration :

$$P(f(X) = x_i, g(Y) = y_j) = P\big(X \in f^{-1}(x_i),\ Y \in g^{-1}(y_j)\big) = P\big(X \in f^{-1}(x_i)\big)\,P\big(Y \in g^{-1}(y_j)\big).$$

■

d) Définition

Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de variables aléatoires discrètes sur (Ω,τ,P), ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes lorsque :

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in \prod_{i\in[\![1,n]\!]} X_i(\Omega),\qquad P\big((X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}=x_i\big)=\prod_{i=1}^{n} P(X_i=x_i).$$

e) Théorème

Si $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille finie de variables aléatoires discrètes sur (Ω,τ,P) mutuellement indépendantes, alors, quel que soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, les événements $\big(X_i\in A_i\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants.

f) Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires discrètes sur (Ω,τ,P), ces variables sont :

- **deux à deux indépendantes** lorsque $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\big(i\neq j \Rightarrow X_i$ et X_j indépendantes$\big)$;
- **mutuellement indépendantes** lorsque, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, la famille $(X_i)_{i\in I}$ est mutuellement indépendante, c'est-à-dire si pour tous $(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$,
$$P\big((X_1=x_1)\cap\cdots\cap(X_n=x_n)\big)=P(X_1=x_1)\times\cdots\times P(X_n=x_n).$$

Exercice

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi conjointe est donnée dans le tableau suivant :

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Démonstration : *[Correction] On obtient :* $P(X=1)=0,4,\ P(X=2)=0,2$ *et* $P(X=3)=0,4.$

De même : $P(Y=1)=0,2,\ P(Y=2)=0,1,\ P(Y=3)=0,4$ *et* $P(Y=4)=0,3.$

On vérifie que $P(X=1,Y=1)=0,08$ *et* $P(X=1)P(Y=1)=0,4\times 0,2=0,08$ *; en vérifiant les 11 autres calculs, on peut affirmer que les variables sont indépendantes !* ■

g) Théorème

Si $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors, pour tout $m\in[\![1,n-1]\!]$ et pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration : *Par récurrence.* ■

3) Espérance d'une variable aléatoire discrète

a) Définition

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $\{x_n, n\in I\}$ est dite d'espérance finie lorsque la famille $\big(x_nP(X=x_n)\big)_{n\in I}$ est sommable ; si tel est le cas, on appelle espérance de X le réel :

$$E(X)=\sum_{n\in I} x_nP(X=x_n).$$

Remarque : on dit que la variable X est centrée si $E(X) = 0$.

Exemple : justifier que $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ correspond à une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$. Admet-elle une espérance finie ?

b) Théorème

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

Démonstration : *Utiliser le fait que* $P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1)$. ■

c) Théorème du transfert (théorème admis)

Si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{n\geqslant 0} P(X = x_n)\, f(x_n).$$

d) Théorème

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes. On a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $E(\alpha X + Y) = \alpha E(X) + E(Y)$. Si $X \geqslant 0$, alors $E(X) \geqslant 0$.

Démonstration : *On applique la formule de transfert à* X *et à* $f : x \mapsto \alpha x$, *puis à* (X, Y) *et à* $f : (x, y) \mapsto x + y$.

$E(X) = \displaystyle\sum_{n\in I} x_n P(X = x_n)$ *donc si* $X \geqslant 0$, *alors* $E(X) \geqslant 0$. ■

e) Théorème

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Démonstration : *Comme* X *et* Y *sont indépendantes :* $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

D'après le théorème de transfert, XY *est d'espérance finie si et seulement si* $\sum xy\, P(X = x)P(Y = y)$ *est sommable.*

Or $\sum xP(X = x)$ *et* $\sum yP(Y = y)$ *sont sommables et :*

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\, P(X = x)P(Y = y) = \left(\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y = y)\right).$$

■

4) Variance

a) Théorème de Koenig-Huyghens

Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie. Si X^2 est d'espérance finie, alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

L'écart-type de X est noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Démonstration : *De façon générale, si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie alors XY est également d'espérance finie. En effet : $(|X|-|Y|)^2 \geqslant 0$ d'où : $|XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$. Ainsi, pour $Y=1$, on a : $|X| \leqslant \frac{1}{2}(X^2+1)$.* ■

b) Théorème

On a : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ V(aX+b) = a^2V(X)$.

Démonstration : $V(aX+b) = E\big((aX+b)^2\big) - \big(E(aX+b)\big)^2 = E(a^2X^2+2abX+b^2) - (aE(X)+b)^2 = a^2V(X)$. ■

Remarque : une variable aléatoire admettant une variance est centrée réduite lorsque $E(X)=0$ et $V(X)=1$. Par exemple : si $V(X) \neq 0$, $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

c) Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, alors : $\forall t>0,\ P(|X| \geqslant t) \leqslant \dfrac{E(|X|)}{t}$.

De plus, si X^2 est d'espérance finie alors : $\forall t>0,\ P(|X| \geqslant t) \leqslant \dfrac{E(X^2)}{t^2}$.

Démonstration : *Soit $\omega \in \Omega$. Si $\omega \in \{|X| \geqslant a\}$, alors $\mathbf{1}_{\{|X|\geqslant a\}}(\omega) = 1$, or $|X(\omega)| \geqslant a$ donc $\dfrac{|X(\omega)|}{a} \geqslant 1$ (car $a>0$), donc $\mathbf{1}_{\{|X|\geqslant a\}}(\omega) \leqslant \dfrac{|X(\omega)|}{a}$.*

Sinon, $\omega \notin \{|X| \geqslant a\}$, alors $\mathbf{1}_{\{|X|\geqslant a\}}(\omega) = 0 \leqslant \dfrac{|X(\omega)|}{a}$ car $\dfrac{|X(\omega)|}{a}$ est positive.

Ainsi : $\mathbf{1}_{\{|X|\geqslant a\}} \leqslant \dfrac{|X|}{a}$, donc $E\big(\mathbf{1}_{\{|X|\geqslant a\}}\big) \leqslant E\left(\dfrac{|X|}{a}\right)$, or $E\big(\mathbf{1}_{\{|X|\geqslant a\}}\big) = P(|X| \geqslant a)$ et $E\left(\dfrac{|X|}{a}\right) = \dfrac{E(|X|)}{a}$. ■

d) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que X^2 soit d'espérance finie, alors : $\forall \varepsilon > 0,\ P(|X-E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Démonstration : *La variable $(X-E(X))^2$ est positive et possède une espérance égale à $V(X)$. On applique l'inégalité de Markov : $\forall \varepsilon>0,\ P\big((X-E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.* ■

e) Variance d'une somme finie de variables aléatoires

Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de variables aléatoires réelles discrètes dont les carrés admettent une espérance finie, alors :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} \big(E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)\big).$$

Corollaire : si $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille finie de variables aléatoires réelles discrètes dont les carrés admettent une espérance finie et deux à deux indépendantes, alors : $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$.

Remarque préliminaire : si X et Y sont de variance finie, alors il en est de même pour $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$. Ainsi $(X - E(X))(Y - E(Y))$ est d'espérance finie.

f) Covariance

Si X et Y sont deux variables discrètes réelles dont les carrés sont d'espérance finie, alors leur covariance, notée $\text{cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$.

Remarques :

- $\text{cov}(X, X) = V(X)$;
- si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse en général (voir l'exercice qui suit) ;
- on peut réécrire la formule de la variance d'une somme à l'aide de la covariance :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{cov}(X_i, X_j) \ ;$$

- $\text{cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda\, \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$.

<u>Exercice</u>

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de piles obtenus moins un, soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de piles au deuxième lancer moins le nombre de piles au premier lancer.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Calculer $\text{cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Énoncer le lien entre l'indépendance de deux variables aléatoires X et Y, et leur covariance.

Démonstration : *[Correction]*

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
(P, P)	1	0
(P, F)	0	-1
(F, P)	0	1
(F, F)	-1	0

D'où la loi du couple :

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0	$1/4$	0
0	$1/4$	0	$1/4$
1	0	$1/4$	0

$\text{cov}(X, Y) = 0 \times (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times 1 \times \frac{1}{4} = 0$.

Or $P(X = -1, Y = -1) = 0$ alors que $P(X = -1)P(Y = -1) = \frac{1}{16}$: les variables sont décorrélées sans être indépendantes. La covariance nulle est donc une condition nécessaire *mais pas* suffisante *pour l'indépendance.* ■

g) Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation est : $\rho(X, Y) = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

h) Théorème (Formule de Koenig-Huyghens)

Si X et Y sont de variance finie, alors $\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.

Démonstration : $\mathrm{cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) = E(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y)$. ■

i) Propriétés

L'application $(X, Y) \mapsto \mathrm{cov}(X, Y)$ est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes de variance finie.

Si X et Y sont de variance finie et indépendantes alors $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Vocabulaire : si un couple de variables aléatoires discrètes réelles de variances finies (X, Y) possède une covariance nulle, alors les variables X et Y sont dites **décorrélées**.

III. Lois discrètes usuelles

1) Loi binomiale

a) Définition

Soit $p \in]0, 1[$, la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p lorsque : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

b) Théorème

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Exemple : un restaurateur accueille chaque soir 70 clients. Il sait qu'en moyenne deux clients sur cinq prennent une crème brûlée. Il pense que s'il prépare 30 crèmes brûlées, dans plus de 70% des cas, la demande sera satisfaite.

A-t-il raison ? Combien de crèmes brûlées doit-il fabriquer au minimum pour que la demande soit satisfaite dans au moins 90% des cas ?

2) Loi géométrique

a) Définition

Soit $p \in]0, 1[$, la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p lorsque : $P(X = 0) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

b) Théorème

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors son espérance est $E(X) = \dfrac{1}{p}$, sa variance est $V(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$.

c) Théorème

Une variable aléatoire X suivant la loi géométrique est sans mémoire, ainsi : $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X > n+k \,|\, X > n) = P(X > k)$.

Remarque : la loi géométrique est la seule loi discrète sur $\mathbb{N}^*$ à être sans mémoire.

3) Loi de Poisson

a) Définition

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

b) Théorème

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors son espérance et sa variance sont toutes deux égales à λ.

c) Théorème

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Démonstration : *En exercice !* ■

4) Résultats asymptotiques

a) Théorème

Si, pour tout entier naturel n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors pour tout entier k, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration : *Si* $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)$, *alors* $P(X_n = k) = \dbinom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \dbinom{n}{k} p_n^k \exp\big((n-k)\ln(1-p_n)\big)$.

Or : $k!\dbinom{n}{k} \sim n^k$, $p_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$, *ainsi* $(n-k)\ln(1-p_n) \sim -np_n \to -\lambda$.

D'où $P(X_n = k) \sim \dfrac{1}{k!} n^k \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k e^{-\lambda} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. ■

b) Loi faible des grands nombres

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant une variance finie, alors, en posant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Démonstration : *On a :* $E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = m$, *et* $V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{V(X_1)}{n}$ *(les* X_k *étant deux à deux indépendantes).*

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (cf. II.4.d) donne alors : $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - E\left(\frac{1}{n}S_n\right)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{V\left(\frac{1}{n}S_n\right)}{\varepsilon^2}$, *d'où le résultat par encadrement.* ■

IV. Variables aléatoires à densité

1) Généralités

a) Définition

Soit X une variable aléatoire, on dit que X admet une densité f si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, où f est une fonction à valeurs positives, ayant un ensemble fini de points de discontinuité et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

b) Caractérisation d'une variable aléatoire à densité

Soit X une variable aléatoire. X est une variable aléatoire à densité si et seulement si sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un ensemble fini de points.

c) Caractérisation des densités d'une variable aléatoire à densité

Par définition : F_X continue en $x \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{t\to x^+} F_X(t) = F_X(x) = \lim\limits_{t\to x^-} F_X(t)$.

Or, comme vu précédemment, $\lim\limits_{t\to x^-} F_X(t) = P(X < x)$.

De plus, $P(X \leqslant x) = P(X < x) + P(X = x)$ (puisque $\{X \leqslant x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\}$ et que P est additive). Ainsi, $F_X(x) = \lim\limits_{t\to x^-} F_X(t)$ signifie que :

$$P(X < x) + P(X = x) = P(X < x),$$

ce qui équivaut à : $P(X = x) = 0$.

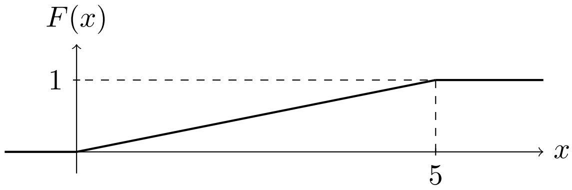
$$\boxed{X \text{ est une v.a.r. à densité} \implies \forall x \in \mathbb{R},\ P(X = x) = 0}$$

Remarque : si X est une v.a.r. à densité, sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Une v.a.r. ne peut être à la fois discrète et à densité. L'ensemble des v.a.r. discrètes et l'ensemble des v.a.r. à densité sont d'intersection vide. Pour autant, ces deux ensembles ne forment pas une partition de l'ensemble des v.a.r. : il existe des v.a.r. qui ne sont ni discrètes, ni à densité.

$$\boxed{X \text{ est une v.a.r. discrète} \implies X \text{ n'admet pas de densité}}$$

Exemple : soit F la fonction définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{5} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$



On vérifie que F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$: X est donc une variable aléatoire à densité, de densité $f(x) = \dfrac{1}{5}\mathbf{1}_{[0,5]}(x)$ (on reconnaît une loi uniforme sur $[0, 5]$, voir IV.6.a).

Exemple : une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 5]\!])$ est-elle à densité ?

Non : X est ici une variable aléatoire **discrète** (loi uniforme sur un ensemble fini), sa fonction de répartition est en escalier, donc discontinue aux points de $X(\Omega)$: elle n'admet donc pas de densité, conformément au résultat ci-dessus.

2) Espérance

a) Définition

Soit X une variable aléatoire à densité f, on dit que X admet une espérance lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge (absolument), et dans ce cas : $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$.

3) Moments

a) Définition

Soit X une variable aléatoire à densité f et $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un moment d'ordre k lorsque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,dt$ converge absolument, et on appelle alors moment d'ordre k de X le réel $m_k(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,dt$.

4) Variance

a) Définition

Soit X une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre 2, on appelle variance de X le réel $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big) = m_2(X) - E(X)^2$, et écart-type le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Démonstration : *Identique au cas discret (formule de Koenig-Huyghens), en remplaçant les sommes par des intégrales.* ■

5) Théorèmes

a) Théorème de transfert (admis)

Soit (Ω, τ, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité sur cet espace, de densité f. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $X(\Omega)$, et soit $Y = g(X)$.

Alors Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,dt$ converge absolument, et dans ce cas : $E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,dt$.

b) Propriétés

Soient X et Y deux variables à densité admettant une espérance et une variance. On a, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$E(aX+b) = aE(X)+b, \qquad E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y), \qquad V(aX+b) = a^2V(X).$$

6) Lois usuelles

a) Loi uniforme

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, $X(\Omega) = [a,b]$.

Densité : $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a,b]$, $f(x) = 0$ sinon.

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

b) Loi exponentielle

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, $X(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$.

Densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = 0$ sinon.

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

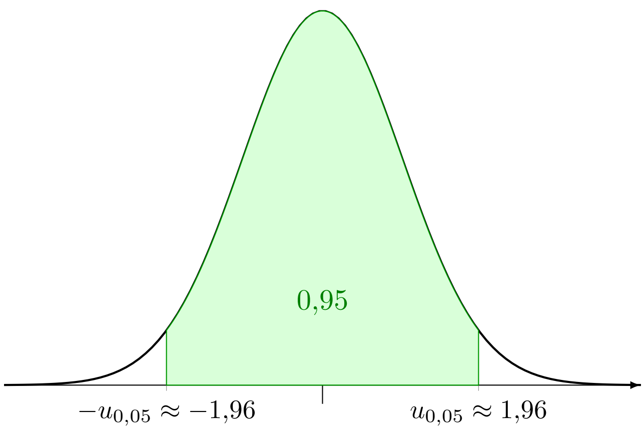
c) Loi normale

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma)$ avec $\sigma > 0$, $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Densité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad E(X) = m, \quad V(X) = \sigma^2.$

Informations complémentaires sur la loi normale :

a) Loi normale centrée réduite. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.



b) Règle dite « des 1, 2, 3 sigma ». Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma)$, alors :

$$P(m-\sigma \leqslant X \leqslant m+\sigma) \approx 0{,}683,$$
$$P(m-2\sigma \leqslant X \leqslant m+2\sigma) \approx 0{,}954,$$
$$P(m-3\sigma \leqslant X \leqslant m+3\sigma) \approx 0{,}997.$$

Démonstration : *Montrons le premier résultat :* $P(m-\sigma \leqslant X \leqslant m+\sigma) = P(-\sigma \leqslant X-m \leqslant +\sigma) = P\left(-1 \leqslant \dfrac{X-m}{\sigma} \leqslant 1\right) = P(-1 \leqslant Y \leqslant 1)$, *où* $Y = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

On ne connaît pas de formule explicite d'une primitive de la fonction densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. *À l'aide de la calculatrice, d'un logiciel, ou d'une table de valeurs, on peut cependant en obtenir une valeur approchée :*

$$P(-1 \leqslant Y \leqslant 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \approx 0{,}683.$$

Les deux autres égalités s'obtiennent de façon identique. ■

Exercice : soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(20,2)$. À l'aide de la table de la loi normale ci-jointe (table 1), donner :

1. $P(X > 21)$;
2. $P(X = 17)$;
3. $P(18 \leqslant X < 20{,}5)$;
4. déterminer x tel que $P(20 - x \leqslant X \leqslant 20 + x) = 0{,}95$.

d) Remarque

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de densités respectives f et g, alors $Z = X + Y$ admet pour densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$.

Exemple : soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et Y de densité $g(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ si $t \in]0,1[$, $g(t) = 0$ sinon. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Déterminer la loi de $X + Y$. Cette variable aléatoire admet-elle une espérance ?

Soit h la densité associée. On a $h(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-t) \times \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$.

Cherchons pour quelles valeurs de x on a $0 \leqslant x - t \leqslant 1$, soit $x - 1 \leqslant t \leqslant x$.

- Si $x \leqslant 0$, alors $t \leqslant 0$ donc $h(x) = 0$;
- si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{x}$;
- si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = 1$;
- si $x > 2$, $h(x) = 0$.

Finalement : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x > 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

De plus : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,h(t)\,dt = \int_0^1 t\sqrt{t}\,dt + \int_1^2 t\,dt = \frac{19}{10}$: la variable aléatoire $X + Y$ admet donc une espérance, égale à $\dfrac{19}{10}$.

V. Convergence et approximations

1) Convergence en loi

Table 1: Fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite : $\Phi(x) = P(X \leqslant x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$, et $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

a) Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et soit X une variable aléatoire réelle. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X.

On dit que la suite (X_n) converge en loi vers X si, en tout réel x où F est continue, on a : $F_n(x) \to F(x)$.

b) Exemple

Pour tout entier naturel non nul n, on définit X_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left[-\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{n}\right]$. Étudier la convergence de la suite (X_n).

On détermine d'abord la fonction de répartition :

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant -\frac{1}{n}\\ \dfrac{nx+1}{2} & \text{si } x\in[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}]\\ 1 & \text{si } x\geqslant \frac{1}{n}\end{cases}$$

Pour $x>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)=1$; pour $x<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)=0$.

On reconnaît la fonction de répartition de la variable aléatoire certaine égale à 0.

2) Rappel : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire ayant une espérance $m\in\mathbb{R}$ et un écart-type $\sigma\in\mathbb{R}$. Alors (cf. II.4.d) :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(|X-m|>\varepsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

3) Rappel : loi faible des grands nombres

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi, admettant une variance finie, alors (cf. III.4.b), en notant $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$, $m=E(X_1)$ et $\sigma=\sigma(X_1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-m\right|>\varepsilon\right)=0.$$

4) Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Soit n un entier non nul et $p\in\,]0;1[$.

Si $n\geqslant 30$, $np>5$ et $n(1-p)>5$, la loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi normale : $\mathcal{N}\big(np,\sqrt{np(1-p)}\big)$.

Ainsi, si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$, en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a\leqslant b,\qquad P(a\leqslant X\leqslant b)\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Problème de correction de continuité : lorsqu'on fait des probabilités, on est souvent conduit à remplacer une loi de probabilité discrète par une loi continue. Ce procédé s'appelle faire une **correction de continuité**.

En effet, si on approche une variable X suivant une loi binomiale par une variable Y suivant une loi normale, plus précisément si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{N}\big(np,\sqrt{np(1-p)}\big)$, alors approcher $P(X=24)$ par $P(Y=24)$ pose un problème puisque $P(Y=24)=0$ (Y étant à densité).

On approche donc plutôt $P(X=24)$ par $P(23{,}5\leqslant Y\leqslant 24{,}5)$.

Voir à ce propos l'exercice n°26.

5) Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$.

Si $\lambda \geqslant 15$, alors la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Ainsi, en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b, \qquad P(a \leqslant X \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

6) Théorème central limite (admis)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, ayant une espérance $m \in \mathbb{R}$ et un écart-type $\sigma > 0$.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$.

Alors la suite (S_n^*) converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b, \qquad P(a \leqslant S_n^* \leqslant b) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Remarque : dans la pratique, on peut approcher S_n^* par $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $n \geqslant 30$.

Exemple : un fournisseur d'accès à internet met en place un local d'accès qui dessert 5000 abonnés. Chaque abonné a une probabilité de 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

- On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés : quelle est la loi de X ? Son espérance et sa variance ?
- Soit $Y = \dfrac{X - 1000}{\sqrt{800}}$, justifier qu'on peut approcher Y par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
- Le fournisseur souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%, c'est-à-dire déterminer un entier N tel que $P(X \geqslant N) \leqslant 0{,}025$. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

7) Étude de deux exercices

Exercice n°1

On lance un dé « parfaitement équilibré » n fois, on note F_n la fréquence de sortie du 1.

Trouver un entier n_0 à partir duquel $P\left(|F_n - \dfrac{1}{6}| \leqslant 0{,}01\right) > 0{,}95$:

- avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
- avec l'approximation par la loi normale.

Démonstration : *[Correction]* ***Avec Bienaymé-Tchebychev :*** $P\left(|F_n - \frac{1}{6}| > 0{,}01\right) < \dfrac{V}{0{,}01^2}$, *or* $V = \dfrac{p(1-p)}{n} = \dfrac{5 \cdot 10^{-4}}{36n}$ *(variance de la fréquence empirique d'une loi de Bernoulli de paramètre* $p = \frac{1}{6}$*).*

D'où $P\left(|F_n - \frac{1}{6}| \leqslant 0{,}01\right) = 1 - P\left(|F_n - \frac{1}{6}| > 0{,}01\right) > 1 - \dfrac{5 \cdot 10^{-4}}{36n}$.

On cherche n tel que $1 - \dfrac{5 \cdot 10^{-4}}{36n} > 0{,}95$, *soit :* $n_0 = 27778$.

Avec la loi normale : *on suppose* $n > 30$. *La variable* nF_n *suit* $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$, *et en posant* $T_n = \dfrac{nF_n - \frac{n}{6}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}} = \dfrac{F_n - \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{n}}}$, *on approche* T_n *par* $\mathcal{N}(0,1)$.

$P\left(|F_n - \frac{1}{6}| \leqslant 0{,}01\right) = P\left(|T_n| \leqslant \dfrac{6 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{5/n}}\right)$, *et l'on veut que cette quantité dépasse* $0{,}95 = P(|T_n| \leqslant 1{,}96)$.

D'où $\dfrac{6 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{5/n}} \geqslant 1{,}96$, *soit :* $n_0 = 5336$. ■

Exercice n°2

Le but de l'exercice est de démontrer que $e^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

1. Démontrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.
2. À l'aide du théorème central limite, donner $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right)$.
3. Démontrer que $P\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = e^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.
4. Conclure.

Démonstration : *[Correction] Par récurrence (et stabilité de la loi de Poisson par somme de variables indépendantes, cf. III.3.c),* $X_1 + \cdots + X_n$ *suit une loi* $\mathcal{P}(n)$ *— déjà vrai pour* $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$.

D'après le théorème central limite : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}$.

Indépendamment du calcul précédent, $P\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = P(S_n \leqslant 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)$, *et comme* $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$ *:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

En combinant les deux résultats : $e^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \longrightarrow \frac{1}{2}$. ■

Feuille d'exercices sur probabilités

Exercice n°1 (autocorrection)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note alors sa couleur, et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans U_1, sinon dans U_2.

Soit B_n l'événement « la boule tirée au n-ième tirage est blanche », on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Démontrer que, pour tout entier n, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}\, p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire la valeur de p_n.

Démonstration : *[Correction] On a* $p_1 = \dfrac{17}{35}$ *; à l'aide d'un arbre, on obtient* $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1-p_n)$.

On pose $f(x) = -\dfrac{6}{35}x + \dfrac{4}{7}$, *et l'on cherche le point fixe :* $f(x) = x$ *admet pour solution* $x = \dfrac{20}{41}$.

On pose la suite $u_n = p_n - \dfrac{20}{41}$, *alors* $u_{n+1} = -\dfrac{6}{35}u_n$.

On obtient : $u_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1}$, *d'où* $p_n = \dfrac{20}{41} - \dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1}$. ■

Exercice n°2 (autocorrection)

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% de chênes, 50% de peupliers et 20% de hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers et 25% des hêtres.

Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?

Démonstration : *[Correction] Calculons par exemple* $P(\textit{Chêne} \,|\, \textit{Malade}) = \dfrac{P(C \cap M)}{P(M)}$.

Or $P(M) = 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}5 \times 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}25$ *et* $P(C \cap M) = 0{,}3 \times 0{,}1$, *d'où :* $P(\textit{Chêne} \,|\, \textit{Malade}) \approx 0{,}37$.

(Les probabilités pour le peuplier et le hêtre s'obtiennent de la même façon, en remplaçant le numérateur par $P(\textit{Peuplier} \cap M)$, *resp.* $P(\textit{Hêtre} \cap M)$*.)* ■

Exercice n°3 (autocorrection)

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1. Calculer p_1.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. En déduire l'expression de p_n.

Démonstration : *[Correction] On obtient* $p_1 = \dfrac{2}{5}$ *et* $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{3}{5}(1-p_n) = -\dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

On résout $f(x) = x$ *avec* $f(x) = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{3}{5}$, *soit* $x = \dfrac{1}{2}$.

On pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{2}$, *alors* $u_{n+1} = -\dfrac{1}{5}u_n$, *et* $u_n = -\dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Finalement : $p_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$. ■

Exercice n°4

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par : X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne, X_2 le temps entre la deuxième panne et la première, et X_3 le temps entre la troisième panne et la deuxième. Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la durée moyenne entre deux pannes consécutives ?
2. Soit E l'événement « chacune des 3 périodes de fonctionnement dure plus de deux heures », calculer $P(E)$.
3. Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 périodes de fonctionnement sans interruption.
   a) $\forall t \in \mathbb{R}$, calculer $P(Y \leqslant t)$.
   b) Déterminer une densité de Y.
   c) Pour $a < 0$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{at}\,dt$.
   d) Démontrer que Y possède une espérance.
   e) Calculer $E(Y)$.

Exercice n°5

X et Y désignent deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p et q, et dont la covariance est nulle.

1. Montrer que $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice n°6 (autocorrection)

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, τ, P) telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les réels α, β, γ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{\alpha}{k} + \dfrac{\beta}{k+1} + \dfrac{\gamma}{k+2}$.
2. Déterminer alors le réel a tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{a}{k(k+1)(k+2)}$ définisse une loi de probabilité de X.
3. X admet-elle une espérance ? une variance ?
4. Si oui, les calculer.

Démonstration : *[Correction] On obtient* $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1/2}{k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1/2}{k+2}$.

On doit avoir $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$, *d'où, après télescopage,* $a = 12$.

On a $kP(X = k) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{12}{k^2}$, *terme général d'une série de Riemann convergente, donc* X *admet une espérance.*

On a $k^2P(X = k) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{12}{k}$, *terme général d'une série de Riemann divergente, donc* X *n'admet pas de variance.*

On calcule $E(X) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{12}{k+1} - \frac{12}{k+2}\right) = 6$. ■

Exercice n°7

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P) de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout entier k non nul, on pose $Y_k = X_k X_{k+1}$.

1) a) Déterminer la loi de Y_k.
   b) Déterminer $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$.
   c) Les variables Y_i et Y_{i+1} sont-elles indépendantes ?
   d) Pour $i \neq j+1$ et $j \neq i+1$, Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?
2) Pour n entier naturel non nul, on pose $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.
   b) En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - p^2| \geqslant \varepsilon)$.

Exercice n°8

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.

1) On définit la variable Z par $Z = \min(X, Y)$.
   a) Calculer, pour un entier n non nul, $P(X \geqslant n)$.
   b) Calculer alors $P(Z \geqslant n)$ puis $P(Z = n)$.
   c) En déduire la loi suivie par Z. Quelle est son espérance et sa variance ?
2) X et Z sont-elles indépendantes ?
3) Soit la variable aléatoire M définie par $M = \max(X, Y)$.
   a) Déterminer la loi de probabilité de M.
   b) M admet-elle une espérance ?

Exercice n°9

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y, sur le même espace probabilisé (Ω, τ, P), suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.

1. Déterminer la loi de $|X - Y|$.
2. Calculer, si elle existe, l'espérance de $|X - Y|$.
3. On note $T = \max(X, Y)$ et $U = \min(X, Y)$.
   a) Exprimer $T + U$, $T - U$ et TU en fonction de X et de Y.
   b) Calculer la covariance de (T, U).

Exercice n°10 (autocorrection)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

Démonstration : *[Correction] On applique le théorème de transfert :* $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} P(X = k)$, *et :*

$$E(Y) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

■

Exercice n°11

1. Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{U}([0,1])$. On note $Y = 2X + 1$. Déterminer la fonction de répartition de Y.
2. La variable Y est-elle à densité ? Si oui, préciser une densité.
3. Reconnaître la loi de Y.

Exercice n°12

Soit n un entier naturel non nul, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que $P(X \geqslant n^2) \leqslant \frac{1}{n}$ (*penser à l'inégalité de Markov :* $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$).

Exercice n°13 (autocorrection)

1) Soit A un réel positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{A}{1+x^2}$.
   a) Déterminer la valeur de A pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X.
   b) Soit $Y = e^X$, déterminer la densité de Y.
2) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, montrer que H est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z à préciser.

Démonstration : *[Correction] On doit avoir* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2}\,dx = 1$, *d'où* $A = \frac{1}{\pi}$.

Calculons $P(Y \leqslant t) = P(e^X \leqslant t) = P(X \leqslant \ln t) = \frac{1}{\pi}\arctan(\ln t) + \frac{1}{2}$ *; il reste à dériver cette expression pour obtenir la densité :* $g(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(\ln t)^2}\frac{1}{t}$.

Il suffit de dériver H : $H'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$, *donc H est bien (croissante, de limites* 0 *et* 1*) la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z à densité H', dont on reconnaît la loi logistique (cf. exercice n°30).* ■

Exercice n°14

1. Montrer que l'intégrale $J = \int_1^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,dx$ est convergente, et déterminer sa valeur.
2. Soit A un réel positif, déterminer la valeur de A pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ Ax^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

   soit une densité.

On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice n°15

À un QCM de 60 questions, un étudiant a l'habitude de faire 5% d'erreurs. En effectuant une approximation que l'on justifiera, déterminer la probabilité qu'un jour donné il commette exactement 6 fautes. Même question avec, cette fois-ci, 12 fautes.

Exercice n°16

Au second tour d'un scrutin uninominal à deux tours, M. Legrand obtient 51% des suffrages contre 49% pour M. Legros. On suppose que les votes des différents électeurs sont indépendants.

1. On dépouille les 10 000 premiers bulletins. Donner un majorant de l'erreur commise en affirmant que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés.
2. En utilisant la loi des grands nombres, déterminer le nombre de bulletins qu'il suffit de dépouiller pour que l'on puisse affirmer, avec moins de 5% d'erreur, que M. Legrand obtient entre 50% et 52% des suffrages exprimés.

3. Dans un bureau de vote donné, représentatif de l'ensemble des électeurs, il y a eu 817 suffrages exprimés. Quelle est la probabilité que M. Legrand y ait obtenu plus de suffrages que M. Legros ? (*on pourra poser Z le nombre de suffrages exprimés en faveur de M. Legrand, et justifier l'approximation de $P(409 \leqslant Z \leqslant 817)$ par une loi normale*).

Exercice n°17

Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces et Z_n est la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement. On approche ensuite p par la proportion $\dfrac{Z_n}{n}$; on suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et peut donc être considéré comme une suite de n tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la loi de Z_n ?
2. En déduire son espérance et sa variance.
3. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
4. En déduire une condition sur n pour que l'approximation proposée donne une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice n°18

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production d'un jour donné dépasse 75 pièces.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si l'on sait que la variance de la production quotidienne est 25 ?

Exercice n°19 (Oral ecricome)

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera X.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. On pose $Y = 1 - 2X$. Déterminer la fonction de répartition de Y.
4. Montrer que Y est une v.a.r. à densité, puis déterminer une densité de Y.

Exercice n°20

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Soit n un entier naturel, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = n\}$.

Exercice n°21

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres $p_1, \ldots, p_n$.

On souhaite montrer que $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$ suit aussi une loi géométrique.

1. Déterminer $P(Y \geqslant k)$.
2. En déduire $P(Y = k)$.
3. Conclure.

Exercice n°22

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left[-1; \dfrac{2}{3}\right]$, déterminer la loi de X^2.

Exercice n°23

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Déterminer la loi de $Y = \tan(X)$ (appelée loi de Cauchy).
2. Déterminer une densité pour Y.
3. Y admet-elle une espérance ?

Exercice n°24

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{-|x|}$.

1. Déterminer a pour que f soit une densité.
2. Montrer que la variable aléatoire X de densité f admet des moments à tout ordre et que :

$$\forall k \geqslant 1, \qquad E(X^k) = \frac{1}{2}\big(1 + (-1)^k\big) \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt.$$

Exercice n°25

Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $t > 0$, on définit $R(t) = P(X < t)$.

1. Montrer que $P(-t \leqslant X \leqslant t) = 2R(t) - 1$.
2. En déduire que, pour tout α de $]0, 1[$: $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha \iff R(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

Exercice n°26

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}4$.

1. Calculer $P(X = 16)$ et $P(13 \leqslant X \leqslant 15)$.
2. On approche X par une variable aléatoire Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(16\,; 9{,}6)$.
   a) Justifier cette approximation.
   b) Calculer $P(Y = 16)$ et $P(13 \leqslant Y \leqslant 15)$. Finalement, est-ce une bonne approximation ?
3. Calculer $P(15{,}5 \leqslant Y \leqslant 16{,}5)$ et $P(12{,}5 \leqslant Y \leqslant 15{,}5)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ? Pourquoi parle-t-on de correction de continuité ?

Exercice n°27

Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol. Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux, qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, et selon les tarifs choisis, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent). Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de pratiquer la surréservation (*surbooking*) en prenant, pour chaque vol, un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

On considère que les passagers se comportent de façon mutuellement indépendante et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est de 10%.

On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol.

1. Donner la loi de S_n.
2. Déterminer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
3. Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que $P(S_n \leqslant 300) \geqslant 0{,}99$. En utilisant le théorème central limite (ou théorème de De Moivre-Laplace), proposer une solution approchée de ce problème. On pourra s'aider de la table de la loi normale (table 1). *(Un raisonnement sur l'une des valeurs aberrantes sera à prendre en compte.)*

Exercice n°28 (Oral concours)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$. La variable Y est-elle une variable aléatoire à densité ? Si oui, déterminer une densité de Y.
2. De même, déterminer la fonction de répartition de X^2, et une densité de X^2 s'il s'agit d'une variable aléatoire à densité.
3. De même, déterminer la loi de X^3.
4. On définit la variable aléatoire Z par : $Z = \dfrac{1}{X}$ si $X > 0$ et $Z = 0$ si $X = 0$. Déterminer la loi de Z.

Exercice n°29 (Edhec)

Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$. On considère la variable aléatoire $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

1. Déterminer la loi de V, son espérance et sa variance.
2. Déterminer une densité de $W = V^2$ et de $Z = \dfrac{1}{V}$.

Exercice n°30 (Edhec)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \dfrac{1}{1+e^{-y}}$.

On admet que F est la fonction de répartition d'une v.a.r., que l'on dit alors suivre la **loi logistique**. On considère Z une variable aléatoire suivant la loi logistique.

1. Déterminer une densité de probabilité de Z, notée f.
2. Étudier la parité de f, puis en déduire que Z admet une espérance et la déterminer.
3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

Exercice n°31 (Essec)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice n°32

La loi conjointe du couple (X,Y) est donnée par :

		$y \in Y(\Omega)$		
		0	1	2
$x \in X(\Omega)$	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
	1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier qu'on a bien défini une loi de couple, puis déterminer les lois marginales.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Exercice n°33 (Edhec)

Une urne contient $N-2$ boules vertes, 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise.

1. Soit X_1 le rang d'apparition de la boule blanche, X_2 le rang d'apparition de la boule rouge.
   a) Déterminer la loi de X_1, la loi de X_2, la loi du couple (X_1, X_2).
   b) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Soit X le rang où l'on obtient pour la première fois soit la boule blanche, soit la boule rouge. Soit Y le rang où l'on a obtenu pour la première fois les deux boules blanche et rouge.
   a) Déterminer la loi de X et la loi de Y.
   b) Calculer les espérances de X et de Y.

Exercice n°34 (Audencia)

On considère trois v.a.r. U, V et W, indépendantes, et telles que U et W suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et V suit la loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

On note $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Rappeler les lois de X et de Y.
2. a) Montrer que $\text{cov}(X, Y)$ existe et la calculer.
   b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.