Chapitre 12 : Polynômes

Dans tout le chapitre, $\varkappa$ désigne le corps $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

I. Généralités

1) Définition

Un **polynôme** est une expression de la forme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$ où n est un entier naturel, $(a_0 ; a_1 ; \ldots a_n) \in \varkappa^n$ sont les coefficients de P et X l'indéterminée.

Le **degré d'un polynôme** non nul est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$
On note d°P cet entier.
On convient que pour le polynôme nul P, d°P = $-\infty$

2) Quelques opérations

Soit P= $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et Q = P= $\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$
Soit $\alpha \in \varkappa$
P+Q = $\sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$
α P = $\sum_{k=0}^{n} \alpha a_k X^k$
P×Q = $\sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

3) Degré

Soient P et Q deux polynômes, $\alpha \in \varkappa^*$
Alors : d°(P+Q) ≤ max(d°P,d°Q) avec égalité si d°P≠d°Q
Alors : d°(αP) = d°(P)
Alors : d°(PQ) = d°P+d°Q

Démonstrations du 2) et 3) évidentes à partir des écritures polynomiales.

Exemples :
Soit P = $3X^2+X+1$, Q = $-X^3+1$ et R=X^3+X^2+1
Alors : deg(P)=2, deg (PQ) =5 et deg(Q+R) = 2

4) Composée

Soit P = $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et Q deux polynômes de K[X], alors on définit PoQ comme polynôme composé de P par Q comme étant le polynôme de K[X] vérifiant
PoQ(X) = $\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$
Remarque : On note également P(Q)

Exemple :
Si $P = X^2 + 2X - 1$ et $Q = X + 3$, alors $P \circ Q = (X+3)^2 + 2(X+3) - 1 = X^2 + 6X + 9 + 2X + 6 - 1 = X^2 + 8X + 14$

Proposition :
Soient P et Q deux polynômes de K[X].
Si deg(Q) ≥ 1, alors deg(P ∘ Q) = deg(P) × deg(Q).

5) Formule du binôme de Newton (due en réalité à Simon Stévin)

Soient A et B deux polynômes et n un entier naturel, alors :
$\boldsymbol{(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$

Démonstration : Identique à celle traitée dans le cas réel.

6) Quelques propriétés :
   a) On a : $\forall(A,B) \in \varkappa[X]^2, AB = 0 \Longrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$
   b) Soit A $= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ *et P deux polynômes de* $\varkappa[X]$,
      alors AoP $= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k P^k \in \varkappa[X]$

Démonstration :

a) *Si A*$\neq$ 0 *et B* $\neq$ 0, *alors, comme deg(AB) = deg(A)+deg(B)*$\neq$*0*
   Donc AB$\neq$*0, résultat démontré par contraposée.*
b) *Il suffit d'appliquer les propriétés du 2)*

II. Fonction polynomiale et dérivation

1) Définition :
   Soit A un polynôme, la fonction $\tilde{A} : \varkappa \rightarrow \varkappa$, x $\rightarrow \tilde{A}$ (x)est appelée fonction polynomiale associée au polynôme A.
   Exemple : la fonction f(x) = $x^2+3x+10$ est la fonction polynomiale associée à $X^2+3X+10$.

   Remarque : Dans la pratique, $\tilde{A}$ est notée A.

   Cette distinction entre polynôme et fonction polynomiale associée peut paraître artificielle. Et sur $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, elle permet principalement de nommer le polynôme, un peu comme « cos » est le nom de la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe cos(x).
   Mais sur des corps plus « exotiques », la différence est de taille.
   Ainsi, sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le polynôme 2X est représenté par la fonction nulle…

2) Dérivée : Comme toute fonction, on peut s'intéresser à sa dérivabilité…
   Soit: A $= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on définit le polynôme dérivé par de A par:
   A' $= \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1}$
   Remarque : la fonction polynomiale associée à A' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à A.

   Exemple : A = X^4+3X^2+2 a pour dérivée : A' = $4X^3+6X$

3) Propriétés :
   Soit A un polynôme de $\varkappa$[X], alors :
   Si deg(A)>0, alors deg(A') = deg(A)-1
   Sinon, A' = 0

   Démonstration : Si deg(A)$\geq$ 1, *alors A* $= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *avec* $a_n \neq 0$
   Et : A $= \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ *avec* $na_n \neq 0$*, donc deg(A') = deg(A)-1*

4) Dérivée successives :
   Soit A un polynôme de $\varkappa$[X], alors on définit par récurrence les dérivées successives de A par :
   $A^{(0)}$ = A et $A^{(r+1)} = (A^{(r)})'$

Soit A et B deux polynômes de de $\varkappa[X]$, alors
pour tout entier naturel r : $(\alpha A+\beta B)^{(r)}=\alpha A^{(r)}+\beta B^{(r)}$

Démonstration : Par récurrence sur r.

5) Dérivées successives (2)
Soit :P = $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, un polynôme
Alors : si p>n, $P^{(p)}=0$
Alors : si p≤n, $P^{(p)}=\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p}$

Démonstration : par récurrence

6) Formule de Taylor
Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $\alpha \in \varkappa$
Alors : P = $P(\alpha)+\frac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha)+\frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n$

Démonstration :
On démontre pour X^p et on utilise la linéarité.
On a : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(X)^p(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k=\sum_{k=0}^{p}\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)\alpha^k}{k!}(X-\alpha)^k=$
$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(X-\alpha)^k\alpha^{p-k}=X^p$

Exemple: Ecrire le développement de Taylor pour P=$2X^3+X^2-5X+2$ en 2

7) Divisibilité
Soient A et B deux polynômes de $\varkappa[X]^2$, B divise A s'il existe Q∈ $\varkappa[X]$, tel que : A = B×Q
On note B|A

Exemple : X^2-X-6 est divisible par X+2 car X^2-X-6 = (X+2)(X-3)

8) Division euclidienne
Soient A et B deux polynômes de $\varkappa[X]^2$, tel que B≠0, alors il existe un unique couple (Q,R) de $\varkappa[X]^2$, tel que : A = B×Q + R et d°R<d°B

Démonstration :
Pour l'unicité, on suppose l'existence de deux couples (Q_1;R_1)∈ $\varkappa[X]^2$ et (Q_2;R_2)∈ $\varkappa[X]^2$, et on montre que deg(Q_1-Q_2)<0, puis que Q_1=Q_2 et R_1=R_2
Pour l'existence, on fait une récurrence avec l'hypothèse : H_n :{$\forall A \in \varkappa_{n-1}[X]$, il existe $(Q,R)\varkappa[X]^2, A=BQ+R$ et $deg(R)<deb(B)$}

Exemple :
$X^3-2X^2+1=(X^2+1)(X-2)+(-X+3)$

9) Polynôme unitaires, polynômes irréductibles
Soit P= $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on dit que P est **unitaire** si $a_n=1$

Soit P ∈ K[X]. On dit que le polynôme P est **irréductible** dans K[X] s'il admet exactement deux diviseurs unitaires.

Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = 2X^2 + X + 1$ admet comme seuls diviseurs unitaires 1 et $X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$, donc P est irréductible.

10) Proposition
• Dans $\mathbb{R}$ [X], les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.
• Dans $\mathbb{C}[X]$, seuls les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

III. Racines d'un polynôme

1) Définition
Soit P un polynôme de $\varkappa[X]$ et $\alpha \in \varkappa$, α est racine de P si $P(\alpha) = 0$

Théorème :
On a **: α est racine de P si et seulement si (X- α) divise P**

Définition
Soit P un polynôme de $\varkappa[X]$ et $\alpha \in \varkappa$, α est racine de P de multiplicité k, si k est le plus grand entier tel que : $(X - \alpha)^k$ divise P

Exercice :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Si α est une racine de P dans $\mathbb{C}$ de multiplicité m, alors $\bar{\alpha}$ aussi.

2) Racines multiples
Soit P un polynôme de $\varkappa[X]$ et $\alpha \in \varkappa$, α est racine de P
On a : α racine de P de multiplicité k (k entier non nul) si et seulement si $[P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ ET $P^k(\alpha) \neq 0]$

Démonstration :
Si α racine de P de multiplicité k (k entier non nul), alors il existe Q de $\varkappa[X]$ tel que : $P(X) = (X-\alpha)^k Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$
Alors clairement : $P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ ET $P^k(\alpha) \neq 0$

Réciproquement : si $P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ ET $P^k(\alpha) \neq 0$
Comme : $P(X) = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n$
Alors : $P(X) = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k + \ldots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n$ et on factorise par : $(X-\alpha)^k$

Remarque : Sur $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, les deux caractérisations des racines d'un polynôme sont absolument équivalentes. Mais par exemple, sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, P(X)=2X+2 vérifie P(1)=0 et P'(1)=0…

3) Racines et degré
Soit $P \in \varkappa_n[X]$ (polynômes dont le degré maximal est n)

Si d°P = n alors P admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité
Si le nombre de racines de P comptées avec leur multiplicité est supérieur à n+1 alors P = 0

Démonstration : Si A admet p racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ alors A est divisible par $\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)$ donc p≤ deg(A)

Exercice : Soit un entier naturel n, en admettant l'existence d'un polynôme A∈ $\mathbb{R}[X]$, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, A(cos(x)) = cos(nx), montrer qu'il est alors unique

Supposons qu'il existe deux polynômes A et B alors A-B aurait une infinité de racines donc A-B = 0 et A = B

4) Polynôme scindé
Un polynôme P de $\varkappa[X]$ est **scindé** s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1 : P = α(X-x_1)×… ×(X-x_n) avec (α, x_1,…, x_n)∈ $\varkappa^n$

Exercice :
#Soit P∈ $\mathbb{R}[X]$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, P(n) = n^3-n^2+1, montrer alors que P = X^3-X^2+1

#Montrer qu'il n'existe pas de polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, P(n) = $\sqrt[3]{n^2+1}$

Soit P∈ $\mathbb{R}_n[X]$, tel que ∀k∈ $[\![1, n+1]\!]$, P(k) = $\frac{1}{k}$
Montrer que P(-1) = n+1

5) Polynômes premiers entre eux
Deux polynômes sont dits **premiers entre eux**, si leurs seuls diviseurs communs sont les polynômes constants.

6) Fonctions symétriques
Soit P = $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \alpha$(X-$x_1$)×… ×(X-$x_n$) un polynôme scindé de degré n
On note σ_1, σ_2 …σ_n les fonctions symétriques élémentaires de x_1…x_n définies pour k entier entre 1 et n par : $\sigma_k = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$

Théorème :
Les coefficients de P s'expriment à l'aide des fonctions symétriques :
On a : $\forall \boldsymbol{k} \in [\![\mathbf{1}, \boldsymbol{n}]\!], \boldsymbol{\sigma_k} = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k}} \frac{\boldsymbol{a_{n-k}}}{\boldsymbol{a_n}}$

Remarque: Pour n=2, on retrouve que pour le polynôme ax^2+bx+c, la somme de ses racines est -b/a et le produit de ses racines c/a.

Démonstration : On développe l'expression : $a_n\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$ puis on identifie les coefficients de A devant X^{n-1} et devant X^0

Exemple : Soit P = (X-1)(X-2)(X-3), calculer $\forall k \in [\![1,3]\!]$ σ_k

7) Interpolation de Lagrange
Soient : x_1, x_2, …x_n des nombres distincts, y_1, y_2, ..y_n des nombres quelconques.

Alors il existe un polynôme P de $\varkappa_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(x_i) = y_i$
$P(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i [\prod_{1\leq j\leq n_{j\neq i}} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}]$

Démonstration: En exercice!

IV. Factorisation

1) Théorème fondamental (admis)
Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine complexe.

Ce théorème dit de d'Alembert-Gauss est admis, et il est faux sur $\mathbb{R}$, par exemple avec X^2+1

Remarque : Ainsi sur $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme est scindé.

2) Décomposition
Tout polynôme de $\varkappa[X]$ se factorise de façon unique (à l'ordre près des facteurs)
Sur $\mathbb{C}$, $P(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i}$ où α_i pour $i\in [\![1,n]\!]$ sont les racines complexes distinctes de P et p_i leur multiplicité respective

Sur $\mathbb{R}$, $P(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i} \prod_{j=1}^{m}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j}$
où α_i pour $i\in [\![1,n]\!]$ sont les racines complexes distinctes de P et p_i leur multiplicité respective et les $X^2+\beta_j X+\gamma_j$

Démonstration :
Pour le cas complexe, c'est l'application du théorème fondamental, les polynômes irréductibles étant ceux de degré 1.

Pour le cas réel :
Les polynômes de degré 1 sont irréductibles (théorème fondamental)
Pour les polynômes de degré 2, si le discriminant est strictement négatif, il ne possède aucune racine réelle donc est irréductible.
Il reste à montrer qu'un polynôme de degré 3 réel n'est pas irréductible.
P admet au moins une racine complexe λ
1er cas : λ est réel et c'est fini
2ème cas : λ n'est pas réel, alors P est également divisible par $X-\bar{\lambda}$
Donc P divisible par $(X-\lambda)(X-\bar{\lambda}) = X^2-2Re(\lambda)+|\lambda|^2$ et donc P non irréductible.

3) Polynômes premiers entre eux et racines communes.
Pour montrer que deux polynômes sont premiers entre eux sur $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, il suffit de montrer qu'ils n'ont pas de racines communes sur $\mathbb{C}$