

# Chapitre 3 : Calcul différentiel (1)

M. Calciano

Ce chapitre pose les bases analytiques nécessaires à l'étude des fonctions de plusieurs variables réelles. On commence par les notions topologiques indispensables (normes, ouverts, continuité), avant d'aborder les dérivées partielles, la différentiabilité et les premiers résultats sur les extrema.

## I. Topologie des espaces vectoriels normés

### 1) Définition « norme »

On appelle norme sur un  $K$ -espace vectoriel  $E$ , une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

- Pour tout  $x$  de  $E$ ,  $N(x) = 0 \iff x = 0$
- Pour tout  $\lambda$  de  $K$ , et  $x$  de  $E$ ,  $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

**Exemple :** Montrer que  $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) \rightarrow N(u) = \max(|x|, |y|)$  définit une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

Seule l'inégalité triangulaire mérite attention :  $N(u + v) = \max(|x + x'|, |y + y'|) \leq \max(|x| + |x'|, |y| + |y'|) \leq N(u) + N(v)$ .

**Remarque :** Si  $E$  est un espace vectoriel muni d'une norme, alors on qualifie  $E$  d'espace vectoriel normé (en abrégé : E.V.N.).

### 2) Applications de la notion de norme

- On peut définir une distance associée  $d$  : Ainsi  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $(x, y) \rightarrow d(x, y) = N(x - y)$ .
- On peut définir une boule fermée :  $B_f(a, r) = \{x \in E, N(a - x) \leq r\}$ . On peut définir une boule ouverte :  $B(a, r) = \{x \in E, N(a - x) < r\}$ . On peut définir une sphère :  $S(a, r) = \{x \in E, N(a - x) = r\}$ .

### 3) Distance d'un point à une partie

On appelle distance d'un point  $x$  de  $E$  à une partie  $A$ , non vide, de  $E$  le réel

$$D(x, A) = \inf\{N(x - y), y \in A\}.$$

(Au fait... Pourquoi cette définition est légitime ?)

La définition de  $d(x, A)$  est légitime car l'ensemble  $\{N(x - y) \mid y \in A\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}^+$ , donc minorée par 0 : son infimum existe bien dans  $\mathbb{R}^+$ .

### 4) Normes équivalentes

On dit que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si les fonctions :

$$\frac{N_1}{N_2} \quad \text{et} \quad \frac{N_2}{N_1}$$

sont majorées sur  $E \setminus \{0\}$ .

De manière équivalente, il existe des constantes  $c, C > 0$  telles que  $\forall x \in E : cN_2(x) \leq N_1(x) \leq CN_2(x)$ .

## 5) Quelques normes sur $K^n$

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ , on définit :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad N_\infty(x) = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|.$$

**Exercice :** Vérifier que l'on définit bien ainsi des normes !

Quelques exemples de boules unité :

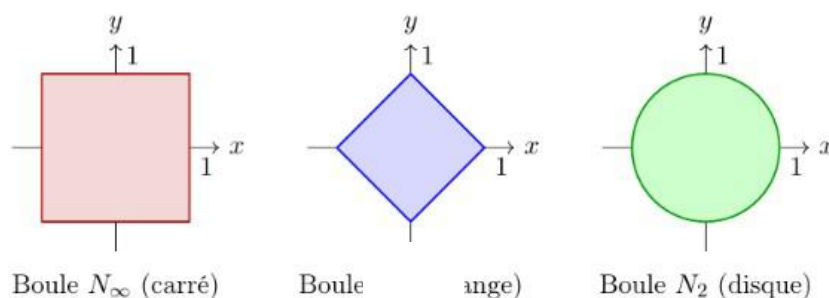


FIGURE 1 – Boules unité des trois normes usuelles sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 6) Voisinage

On appelle voisinage d'un point  $a$  de  $E$  toute partie  $X$  de  $E$  contenant une boule ouverte de centre  $a$ . Ainsi :

$$X \in \mathcal{V}(a) \iff \exists r > 0, B(a, r) \subset X.$$

## 7) Ouverts/fermés

On appelle ouvert de  $E$  toute partie  $X$  de  $E$  qui est voisinage de chacun de ses points :

$$X \text{ ouvert de } E \iff \forall x \in X, \exists r_x > 0, B(x, r_x) \subset X.$$

On appelle fermé de  $E$  toute partie  $X$  de  $E$  tel que  $E \setminus X$  est un ouvert de  $E$ .

**Exemples :**

- $[0, 1]$  est une partie fermée,  $\mathbb{R}$  est un ouvert, une boule ouverte est un ouvert !
- $E$  et  $\emptyset$  sont des ouverts.

## 8) Théorème sur les ouverts

Si  $D_1$  et  $D_2$  désignent deux ouverts d'un E.V.N.  $E$  alors  $D_1 \cap D_2$  et  $D_1 \cup D_2$  sont des ouverts de  $E$  (résultats identiques si  $D_1$  et  $D_2$  sont des parties fermées).

*Démonstration (intersection de deux ouverts) :* Soit  $x \in U_1 \cap U_2$ . Puisque  $U_1$  est ouvert, il existe  $r_1 > 0$  tel que  $B(x, r_1) \subset U_1$ . De même, il existe  $r_2 > 0$  tel que  $B(x, r_2) \subset U_2$ . Alors  $B(x, \min(r_1, r_2)) \subset U_1 \cap U_2$ , ce qui montre que  $U_1 \cap U_2$  est bien un ouvert.

## 9) Théorème (admis)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  de dimension finie. Alors toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes. C'est donc en particulier le cas sur  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .

*Remarque :* Ce théorème est remarquable et propre à la dimension finie : en dimension infinie, deux normes peuvent ne pas être équivalentes. Sa conséquence pratique est que toutes les notions topologiques qui suivent (limite, continuité, ouvert...) ne dépendent pas du choix de la norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

## II. Limites et continuité

Dans toute la suite,  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  (les définitions s'adaptent à  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ), et les normes utilisées sont indifférentes grâce au théorème d'équivalence. On travaille avec la norme  $N_\infty$  pour la commodité des calculs.

### 1) Limite

Soit  $x_0$  un point de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ , et  $E$  un voisinage de ce point.

On dit qu'une fonction  $f$  définie au voisinage de  $x_0$  admet pour limite le nombre réel  $L$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut associer un nombre  $\eta > 0$  tel que les relations  $x \in E$  et  $\|x - x_0\|_\infty \leq \eta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x - x_0\|_\infty \leq \eta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

On note :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

On dit que  $f$  admet  $+\infty$  pour limite en  $x_0$  si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \|x - x_0\|_\infty \leq \eta \implies |f(x)| \geq A.$$

**Remarques :**

- La notion de limite *ici* ne dépend pas des normes utilisées.
- La limite, si elle existe, est unique.

*Démonstration :* Si  $f$  admet  $L$  et  $L'$  comme limites alors  $L = L'$ . (En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| < |f(x) - L| + |f(x) - L'| < \varepsilon$ , en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0...)

### 2) Proposition

Une fonction  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ou de  $E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $x_0$  admet une limite  $L$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\{x \in E, x \neq x_0\}$  qui converge vers  $x_0$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L$ .

*Démonstration (esquisse) :* Le sens direct est immédiat par définition. Pour la réciproque, on procède par contraposée : si  $f$  ne tend pas vers  $L$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et une suite  $(x_n)$  avec  $\|x_n - x_0\| \leq 1/n$  et  $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ .

### 3) Opérations sur les limites

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ou de  $E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définies au voisinage de  $x_0$  admettant respectivement pour limites  $L_1$  et  $L_2$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .

- Pour tout couple de nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la limite de la fonction  $\alpha f + \beta g$  lorsque  $x \rightarrow x_0$  existe et est égale à  $\alpha L_1 + \beta L_2$ .
- La limite de la fonction  $fg$  quand  $x \rightarrow x_0$  existe et elle est égale à  $L_1 L_2$ .
- La limite de  $f/g$  si  $L_2 \neq 0$  lorsque  $x \rightarrow x_0$  existe et est égale à  $L_1/L_2$ .

#### 4) Permutation de limites

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ .

Supposons de plus que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$  existe et pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$  existe. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = L.$$

*Démonstration* : Revenir à la définition de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$  et utiliser... l'unicité de la limite.

### III. Fonctions continues

#### 1) Définition

$U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$  (mais la définition se généralise sans peine à  $\mathbb{R}^n$ ).

Soit  $p \in U$ , on dit que  $f$  est continue en  $p$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in U, \|z - p\| \leq \eta \Rightarrow |f(z) - f(p)| \leq \varepsilon.$$

On dit que  $f$  est *continue sur*  $U$  si elle est *continue en tout point de*  $U$ .

**Exemple** : Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow x - 2y$  est continue.

Soit  $\varepsilon > 0$ , on cherche  $\eta > 0$ ,  $\forall z \in U, \|z - p\| \leq \eta \Rightarrow |f(z) - f(p)| \leq \varepsilon$ .

Soient  $z(x', y')$  et  $p(x, y)$  alors

$$|f(z) - f(p)| = |x' - 2y' - x + 2y| \leq |x - x'| + 2|y - y'| \leq 2(|x - x'| + |y - y'|).$$

Or  $\|z - p\| \leq \eta \iff |x - x'| \leq \eta$  et  $|y - y'| \leq \eta$ .

En prenant  $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$ , on a  $2(|x - x'| + |y - y'|) \leq \varepsilon$ , c'est-à-dire :  $|f(z) - f(p)| \leq \varepsilon$ .

#### 2) Remarque

Pour que  $f$  soit continue en  $a$ , il faut et il suffit que  $f$  admette  $f(a)$  comme limite en  $a$ ...

#### 3) Caractérisation séquentielle de la continuité en un point

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  convergeant vers  $a$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ .

*Démonstration* : voir II.2)

#### 4) Opérations algébriques

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $f$  et  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est continue sur  $X$  alors  $|f|$  est continue sur  $X$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $X$  alors  $f + g$  continue sur  $X$ .
- Si  $f$  est continue sur  $X$  alors  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha f$  est continue sur  $X$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $X$  alors  $fg$  est continue sur  $X$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $X$  et si  $g$  ne s'annule pas sur  $X$  alors  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $X$ .

## 5) Un exemple de fonctions classiques continues...

Une fonction polynomiale en 3 variables  $x, y, z$  est une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$x^{m_1}y^{m_2}z^{m_3}, \quad m_1, m_2, m_3 \text{ entiers naturels}$$

(on généralise sans peine à une fonction polynomiale à  $p$  variables).

Toute fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  polynomiale est continue sur  $\mathbb{R}^3$ .

Ainsi :  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car polynomiale.

## 6) Composée de fonctions continues

Soit  $X$  et  $Y$  deux parties de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , et soit  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(X) \subset Y$ . Si  $f$  est continue sur  $X$  et si  $g$  est continue sur  $Y$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $X$ .

*Démonstration* : Si  $f$  est continue en  $p \in U$ , alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in U, \|z - p\| \leq \eta \Rightarrow |f(z) - f(p)| \leq \varepsilon.$$

Si  $g$  est continue en  $f(p)$ , alors :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta' > 0, \forall z' \in I, \|z' - f(p)\| \leq \eta' \Rightarrow |g(z') - g \circ f(p)| \leq \varepsilon'.$$

Soit  $\varepsilon' > 0, \exists \eta' > 0$ ,

$$\|f(z) - f(p)\| \leq \eta' \Rightarrow |g \circ f(z) - g \circ f(p)| \leq \varepsilon'.$$

Pour  $\varepsilon = \eta'$ , on a :

$$\exists \eta > 0, \forall z \in U, \|z - p\| \leq \eta \Rightarrow |f(z) - f(p)| \leq \eta'.$$

Et donc, on a bien :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta' > 0, \|f(z) - f(p)\| \leq \eta' \Rightarrow |g \circ f(z) - g \circ f(p)| \leq \varepsilon'.$$

### Exercice :

Montrer que  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

**Première méthode** : Directement avec la définition.

**Deuxième méthode** : Image réciproque.

- a) Démontrer que si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, et si  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , alors  $f^{-1}(A)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
- b) En déduire alors que  $U$  est un ouvert.

*Démonstration de (a)* : Soit  $x_0 \in f^{-1}(V)$ ; alors  $f(x_0) \in V$ . Comme  $V$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[ \subset V$ . Par continuité de  $f$  en  $x_0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $\|x - x_0\| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ , donc  $f(x) \in V$ , i.e.  $x \in f^{-1}(V)$ . Ainsi  $B(x_0, \eta) \subset f^{-1}(V)$ .

## 7) Continuité partielle

### a) Définition

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ , l'application  $f(\cdot, \beta), x \rightarrow f(x, \beta)$  définie sur l'ensemble des réels  $x$  tels que  $(x, \beta) \in X$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'application  $f(\alpha, \cdot), x \rightarrow f(\alpha, x)$  définie sur l'ensemble des réels  $x$  tels que  $(\alpha, x) \in X$ .

**Ces applications sont appelées applications ou fonctions partielles.**

*Remarque* : Ces définitions s'adaptent sans difficultés à une partie  $X$  de  $\mathbb{R}^3$ .

## b) Continuité

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $a(\alpha, \beta) \in I \times J$ .

**Si  $f$  est continue en  $a$  alors les fonctions partielles  $f(\cdot, \beta)$  et  $f(\alpha, \cdot)$  sont continues respectivement en  $\alpha$  et en  $\beta$ .**

*Démonstration :* On a :  $f(\cdot, \beta)$  composée de  $I \rightarrow I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow (x, \beta) \rightarrow f(x, \beta)$ , toutes les deux continues.

*Remarque :* Le résultat se généralise à  $\mathbb{R}^3$ .

## c) Proposition : La réciproque de la propriété précédente est fausse

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

Les applications partielles admettent 0 comme limite en 0.

Pourtant  $f(x, x) = \frac{1}{2}$  donc  $\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} f(x, x) = \frac{1}{2} \neq 0$ .

*Remarque :* Cette technique consistant à prendre un chemin particulier ici  $(x, x)$ , c'est-à-dire la première bissectrice, est pratique pour démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

## d) Étude d'un exemple

Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en  $(0, 0)$  de

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^6} \quad \text{et} \quad g(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^6}.$$

**Pour  $f$  :** Il est clair que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

On a  $f(x, 0) = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$ .

Or  $f(x, x) = \frac{1}{1 + x^2} \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Donc  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

**Pour  $g$  :** Il est clair que  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(0, x) = 0$ .

Donc si cette limite existe, elle est nulle.

On passe en coordonnées polaires :  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$ .

On a :  $0 \leq |g(x, y)| \leq \rho^{\frac{1}{6}} \rightarrow 0$ . Ainsi  $g$  a pour limite 0 en  $(0, 0)$ .

## IV. Fonctions de classe $C^1$

$U$  désigne ici un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$  et  $f$  une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

### 1) Dérivées partielles

Soit  $p = (a, b) \in U$ .

Soit  $D_1 = \{x \in \mathbb{R}, (x, b) \in U\}$  et  $D_2 = \{y \in \mathbb{R}, (a, y) \in U\}$ .

On définit les applications partielles :

$$\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow f(x, b)$$

et

$$\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \rightarrow f(a, y).$$

Soit  $p = (a, b) \in U$ .

Si l'application  $\varphi_1$  est dérivable en  $a$ , alors on dit que  $f$  admet une première dérivée partielle en  $(a, b)$  et on pose :

$$\partial_1 f(a, b) = \varphi_1'(a).$$

Si l'application  $\varphi_2$  est dérivable en  $b$ , alors on dit que  $f$  admet une deuxième dérivée partielle en  $(a, b)$  et on pose :

$$\partial_2 f(a, b) = \varphi_2'(b).$$

En pratique, on utilise plutôt :

$$\partial_1 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{et} \quad \partial_2 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Attention, on verra très souvent ce genre d'écriture :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ .

La variable  $x$  au dénominateur signifie qu'on dérive  $f$  selon la première variable (c'est une variable liée) tandis que le  $x$  de  $(x, y, z)$  désigne une coordonnée d'un point libre (c'est une variable libre). Ces notations sont donc bien différentes !

**Exemples :**

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  et la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma yz.$$

Déterminer les dérivées partielles de  $f$ .

On a facilement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \beta + \gamma z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \gamma y.$$

Soit  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$  et  $f : H \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^y$ .

Déterminer les dérivées partielles de  $f$ .

On peut écrire :  $f(x, y) = e^{y \ln x}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(x)x^y.$$

## 2) Proposition

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $p \in U$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent des dérivées partielles en  $p(a, b)$ , alors  $f + g$  aussi. De plus :

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)$$

et

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b).$$

Si  $f$  et  $g$  admettent des dérivées partielles en  $p$ , alors  $fg$  aussi. De plus :

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)g(a, b) + f(p)\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)$$

et

$$\frac{\partial(fg)}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)g(a, b) + f(a, b)\frac{\partial g}{\partial y}(a, b).$$

De même pour le quotient si le dénominateur ne s'annule pas :

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(a, b) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)g(a, b) - f(a, b)\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{g^2(a, b)}.$$

**Attention : L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité de la fonction.**

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que, pourtant,  $f$  est discontinue en  $(0, 0)$ .

On a : Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Et pour  $(x, y) = (0, 0)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

De même :  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

En passant par les coordonnées polaires :  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \cos \theta r \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$  qui ne tend pas toujours vers 0, selon les valeurs de  $\theta$ .

### 3) Fonctions de classe $C^1$

Une fonction  $f$  définie sur un ouvert  $U$  est dite de classe  $C^1$  si elle admet des dérivées partielles en tout point de  $U$  et que les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues.

On note  $C^1(U, \mathbb{R})$  leur ensemble.

**Exemple important :** les polynômes à  $p$  variables sont  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^p$ .

### 4) Développement limité à l'ordre 1 (théorème admis)

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  et  $p = (a, b) \in U$ .

Il existe une fonction  $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\varepsilon(z) \rightarrow_{z \rightarrow p} 0$ . Et :  $\forall (x, y) \in U$  :

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \varepsilon(x, y)\|(x, y) - (a, b)\|.$$

### 5) Proposition

Si  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ , alors  $f$  est continue sur  $U$ .

*Démonstration :* évidente à l'aide du DL à l'ordre 1 !

*Remarque :* Comme en dimension 1, la réciproque de cette proposition est fausse.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow |x|$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , mais n'est pas  $C^1$  puisqu'elle n'admet pas de dérivée partielle en  $(0, 0)$  par rapport à la première variable...

## 6) Proposition

Si  $(f, g) \in C^1(U, \mathbb{R})^2$ ,  $f + g$  et  $fg$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $U$ .

## 7) Gradient

### a) Définition

Si  $U$  désigne un **ouvert de  $\mathbb{R}^2$** .

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ , le **gradient de  $f$**  est l'application  $\nabla f$  vérifiant :  $U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$(a, b) \rightarrow \nabla f(a, b), \quad \text{avec } \nabla f(a, b) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right).$$

Si  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\nabla f(a, b, c) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \right).$$

### b) Remarques

Géométriquement,  $\nabla f(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est le vecteur du plan dont les coordonnées sont  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ .

**Le gradient est un champ de vecteurs**, c'est-à-dire une application dont les valeurs sont des vecteurs.

Réécriture du développement limité à l'ordre 1 :

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  et  $p = (a, b) \in U$ .

Il existe une fonction  $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\varepsilon(z) \rightarrow_{z \rightarrow p} 0$ . Et :  $\forall (x, y) \in U$  :

$$f(z) = f(p) + (\nabla f(z) \mid (z - p)) + \varepsilon(z)\|z - p\|.$$

**Exemple :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \rightarrow xy^2 - yz^2$ .

Calculer  $\nabla f(1, -2, 3)$ .

## 8) Différentielle

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ .

**Pour tout  $a \in U$ , l'application linéaire :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h, k) \rightarrow h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a)$  est appelée différentielle de  $f$  en  $a$ , notée  $df(a)$ .**

**Remarques :**

— On omet souvent d'indiquer le point  $a$ , et on obtient la formule :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

(avec  $dx : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h, k) \rightarrow h$  et  $dy : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(h, k) \rightarrow k$ )

— La différentielle d'une fonction en un point renseigne sur le comportement local de  $f$ . Plus précisément, la différentielle de  $f$  en un point  $M$  représente la variation infinitésimale de la fonction  $f$  en ce point, c'est-à-dire la variation de  $f$  lors d'une variation infinitésimale à proximité de  $M$ .

**Exercice :**

1. Déterminer la différentielle de  $f : (x, y, z) \rightarrow x^2 - y^3 + 2xyz$  en tout point  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) \rightarrow \|u\|_2^2$ , montrer que la différentielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  est :  $df(x_0, y_0) = 2x_0 dx + 2y_0 dy$ .

## V. Dérivation des fonctions composées

### 1) Composition avec une fonction d'une variable

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ ,  $I$  un intervalle contenant  $f(U)$  et  $\theta \in C^1(I, \mathbb{R})$ .

Alors  $\theta \circ f$  est une fonction de classe  $C^1$  avec pour tout  $p$  de  $U$  :

$$\frac{\partial \theta \circ f}{\partial x}(p) = \theta'(f(p)) \frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta \circ f}{\partial y}(p) = \theta'(f(p)) \frac{\partial f}{\partial y}(p).$$

### 2) Première règle de la chaîne

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  et  $(\gamma_1; \gamma_2) \in C^1(I, \mathbb{R})^2$ .

On suppose que la fonction  $\gamma : t \rightarrow (\gamma_1(t); \gamma_2(t))$  est à valeurs dans  $U$ .

Alors  $f \circ \gamma : t \rightarrow f(\gamma_1(t); \gamma_2(t))$  est de classe  $C^1$  et, pour tout  $a$  de  $I$  :

On a :

$$(f \circ \gamma)'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(a)) \gamma_1'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(a)) \gamma_2'(a).$$

**Exemple :**

Soit  $f$  une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

On procède au changement de variables en coordonnées polaires, soit  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ .

On définit alors la fonction  $h : (r, \theta) \rightarrow f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

Déterminer  $\frac{\partial h}{\partial r}$  et  $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ .

### 3) Dérivée selon un vecteur

Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ ,  $p \in U$ ,  $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ .

L'application  $\varphi_v : t \rightarrow f(p + tv)$  est définie au voisinage de 0, dérivable en 0, de dérivée :

$$\varphi_v'(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(p) + k \frac{\partial f}{\partial y}(p) = (\nabla f(p) \mid v).$$

On note  $D_v f(p) = \varphi_v'(0)$ , cette dérivée est la dérivée de  $f$  en  $p$  selon le vecteur  $v$ .

*Remarque :* Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $p$  selon le vecteur  $v$  revient à étudier l'existence de :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

### 4) Deuxième règle de la chaîne

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ , soit  $V$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $(\varphi, \psi) \in C^1(V, \mathbb{R})^2$  un couple de fonctions tel que

$$\Phi : (x, y) \rightarrow (\varphi(x, y), \psi(x, y)) \text{ soit à valeurs dans } U.$$

Alors  $f \circ \Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  est de classe  $C^1$ .

**De plus :**  $\forall p \in V$ ,

$$\begin{cases} \partial_1(f \circ \Phi) = \partial_1 f(\Phi(p)) \partial_1 \varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p)) \partial_1 \psi(p) \\ \partial_2(f \circ \Phi) = \partial_1 f(\Phi(p)) \partial_2 \varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p)) \partial_2 \psi(p) \end{cases}$$

**Exemple :**

Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , on considère  $F : (u, v) \rightarrow f(u + uv, u - uv^2)$ .

Montrer que  $F$  est  $C^1$ .

Déterminer pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial F}{\partial u}(a, b)$  et  $\frac{\partial F}{\partial v}(a, b)$ .

## 5) Exemple : Étude d'une équation aux dérivées partielles

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^3 + y.$$

On primitive par rapport à  $x$  :  $f(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy + C(y)$ .

Or  $C(y) = f(0, y)$  donc  $C$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Réciproquement  $f(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy + C(y)$  convient !

## 6) Étude d'une équation aux dérivées partielles avec changements de variables

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + xy.$$

En utilisant le changement de variable :  $x = u + v$  et  $y = u - v$ .

Avant de traiter l'exercice, on constate un « problème dans le changement de variable », car ce sont les anciennes variables qui s'expriment en fonction des nouvelles, on a facilement :  $u = \frac{x+y}{2}$  et  $v = \frac{x-y}{2}$ .

On pose  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \rightarrow (u + v, u - v)$ .

On a  $\varphi$   $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et  $g = f \circ \varphi$  est  $C^1$ .

Et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u, v)) - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi^{-1}(u, v))$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u, v)) - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi^{-1}(u, v)).$$

D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u, v)).$$

On résout :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u, v)) = x^2 + xy \quad \text{soit} \quad \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u, v)) = 2u^2 + 2uv \dots$$

## VI. Dérivées partielles successives

### 1) Définition

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Soit  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ .

On dit que  $f$  admet une dérivée partielle seconde en  $a$  par rapport aux places  $i$  et  $j$  successivement si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ existe sur un voisinage de } a \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a) \text{ existe} \end{array} \right.$$

Dans ce cas, le réel  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a)$  est noté  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ .

Remarque : On peut généraliser pour  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

## 2) Définition

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^k$  pour  $k$  entier supérieur ou égal à 1, si  $f$  admet des dérivées partielles successives sur  $U$  jusqu'à l'ordre  $k$  inclus, et que toutes ces dérivées soient continues sur  $U$ . Dans le cas où  $f$  est de classe  $C^k$  pour tout entier  $k$ , alors on dit que  $f$  est  $C^\infty$ .

## 3) Théorème de Schwarz (admis)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in U$ . Si  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ , alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ .

En passant en polaires, déterminer  $f(0, 0)$ . Déterminer  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ . Déterminer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ . Montrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ . Montrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ . Que peut-on conclure ? Cet exemple a été construit par Peano !

## VII. Extrema : Le cas de $\mathbb{R}^2$ (Dans tout ce paragraphe, $U$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ )

### 1) Définition

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $p \in X$ .

On dit que  $f$  admet un maximum en  $p$  : si  $\forall z \in X, f(z) \leq f(p)$ .

On dit que  $f$  admet un maximum local en  $p$  : si  $\exists \eta > 0, \forall z \in X \cap D(p, \eta), f(z) \leq f(p)$ .

On définit de même les notions de minimum et de minimum local.

On dit que  $f$  admet un extremum en  $p$ , si  $f$  admet un maximum ou un minimum en  $p$ . On définit de la même façon la notion d'extremum local.

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , par  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , montrer que  $f$  admet un minimum en  $(0, 0)$ .

### 2) Définition

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ , et  $p \in U$ .

On dit que  $p$  est un point critique pour  $f$  si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0.$$

### 3) Théorème

Soit  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ , et  $p \in U$ .

Si  $f$  admet un extremum local en  $p$ , alors  $p$  est un point critique de  $f$ .

*Démonstration :* Supposons  $f$  maximum local en  $p = (a, b)$ . La fonction partielle  $x \mapsto f(x, b)$  admet un maximum local en  $a$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ . De même pour  $y$ .

*Remarque :* Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque de ce théorème est fautive, ainsi, une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum local en chacun de ses points critiques.

**Exemple :**

Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , par  $f(x, y) = x^3 + y^3$ .

Vérifier que  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$  sans être un extremum local.

**VIII. Exercices****Exercice n°1**

1. Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$  :
  - a)  $\mathbb{R}^2$
  - b)  $]0, 1[$
  - c)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
2. a) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue, et soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , montrer que  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .  
 b) Montrer que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > \cos(x)\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice n°2**

Les deux questions sont indépendantes :

1. Soit  $I$  un ensemble quelconque et  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , montrer que  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , montrer que  $U \cap V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice n°3**

Pour chaque sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , préciser s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé, ou d'un fermé borné. Aucune justification n'est demandée.

1.  $A = \mathbb{R}^2$
2.  $B = [0, 1] \times [0, 1]$
3.  $C = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
4.  $D = ]1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*$
5.  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$
6.  $F = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
7.  $G = ]0, 1[ \times ]0, 1[$
8.  $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
9.  $I = (\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}) \times \mathbb{R}_+^*$
10.  $J = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

**Exercice n°4**

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \frac{x}{y}, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow e^{-x} \sin(x^2 + y^2)$ .

**Exercice n°5**

Soit  $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  n'admet pas de dérivées partielles en  $(0, 0)$  mais que sa restriction à  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est de classe  $C^1$ . Préciser ses dérivées partielles.

### Exercice n°6

Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , montrer que la fonction  $\theta : t \rightarrow f(t^2, t^3)$  est de classe  $C^1$ , et calculer sa dérivée.

### Exercice n°7

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que la fonction  $f$  admet des dérivées selon tout vecteur en  $(0, 0)$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

### Exercice n°8

Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , montrer que  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  si et seulement si on peut trouver une fonction  $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = h(x)$ .

### Exercice n°9 (oraux MP CCINP 2022)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Prouver :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
2. a) Justifier que le domaine de définition de  $f$  est bien  $\mathbb{R}^2$ .  
b) Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Dans cette question, on suppose :  $\alpha = 0$ .
  - a) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et les calculer.
  - b) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  et donner leur valeur.
  - c) La fonction  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

### Exercice n°10

Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , montrer que  $f$  vérifie :  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$  si et seulement si on peut trouver une fonction  $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = h\left(\frac{2x + y}{3}\right)$ .

Indication : On posera  $x = u + v$  et  $y = u - 2v$  et on pourra utiliser la fonction  $g : (u, v) \rightarrow f(u + v, u - 2v)$ .

### Exercice n°11

Montrer l'existence en  $(0, 0)$  des fonctions suivantes :

- a)  $\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
- b)  $\frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}$  (Indication : On posera  $X = x^3$  et  $Y = y^2$ , puis on passera en coordonnées polaires)

### Exercice n°12

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Étudier la continuité de  $f$ .
2. Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles.

### Exercice n°13

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .
3. Montrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

### Exercice n°14 (d'après CCP)

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x, y, y^2)$$

On dit alors qu'on étudie la fonction  $g$  **sous la contrainte**  $z = y^2$ .

1. **Expliciter**  $f(x, y)$ , et calculer :

$$\partial_1(f)(x, y), \quad \partial_2(f)(x, y), \quad \partial_1^2(f)(x, y), \quad \partial_{12}^2(f)(x, y) \quad \text{et} \quad \partial_2^2(f)(x, y)$$

2. **Déterminer les extrema éventuels de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .**
3. **Montrer que, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,**

$$g(x, y, z) = 4 \left( x + \frac{1}{2}z \right)^2 + 4 \left( y - \frac{1}{2}z \right)^2.$$

En déduire que  $f$  admet un minimum global en  $(0, 0)$ .

4. **Montrer que  $f$  présente un minimum local en  $(-2, 2)$ .**

### Exercice n°15

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$ .

1. Montrer que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .
2. Déterminer les points critiques de  $f$ .
3. Montrer que  $f$  admet un minimum local.
4. Ce minimum est-il global ?
5. Peut-on dire que  $f$  admette un maximum global ?

### Exercice n°16

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow x^2y + \ln(1 + y^2)$ .

1. Montrer que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .
2. Déterminer les points critiques de  $f$ .
3. En étudiant les signes de  $f(x, -x^3)$  et  $f(0, y)$ , montrer que  $f$  n'a pas de minimum local en  $(0, 0)$ .
4. En étudiant la limite en  $+\infty$  de  $f(0, y)$ , que peut-on conclure ?
5. En étudiant la limite en  $-\infty$  de  $f(1, y)$ , que peut-on conclure ?

### Exercice n°17

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ . Montrer que  $f$  admet un prolongement  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice n°18

Donner les extrema globaux et locaux de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow -2x^3 + 3x^2 + y^2$ .

### Exercice n°19

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  telle que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = f(y, x)$ , quelle relation a-t-on entre les dérivées partielles de  $f$  ?

### Exercice n°20

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  telle que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ .

On pose  $g(r, t) = f(r \cos(t), r \sin(t))$ .

1. Calculer  $\frac{\partial g}{\partial r}$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .
2. Même question avec  $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ .
3. Déterminer une relation entre  $\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right)$  et  $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ .

### Exercice n°21

Soit  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 0\}$  et  $U = ]0, +\infty[ \times ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

Soit  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(r; \theta) \rightarrow (x, y) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

1. Justifier que  $P$  soit un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}$ .
3. Justifier que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .
4. Montrer que  $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .
5. Calculer  $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ .

6. En déduire que l'expression du Laplacien de  $f$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , en coordonnées polaires est :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}.$$

### Exercice n°22

On s'intéresse aux fonctions  $f$  définies de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

1. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , on pose  $u = x + y$ ,  $v = x + 2y$ .  
On définit enfin la fonction  $g$  par :  $g(u, v) = g(x + y, x + 2y) = f(x, y)$ .  
Étudier la dérivabilité de  $g$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Exprimer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  en fonction de  $u$ , de  $v$  et des dérivées partielles de  $g$ .
3. En déduire l'ensemble des fonctions  $f$  qui satisfont aux conditions de l'énoncé.

### Exercice n°23

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$ .

1. Justifier que  $f$  soit  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Déterminer les dérivées partielles de  $f$ .
3. En déduire que le seul point critique de  $f$  est  $A(-1, 0)$ .
4. Montrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq xe^x$ .
5. En étudiant la fonction  $g$  définie par  $g(x) = xe^x$ , conclure que le point  $A$  correspond à un extremum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .