

Chapitre 7 : Calcul différentiel (2)

M. Calciano

Le plan de l'ensemble du chapitre est le suivant :

- **Fonctions numériques** (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$)
- **Fonctions** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I. Fonctions numériques de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Dérivée selon un vecteur

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ et h un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$ (attention : h n'est pas a priori un scalaire).

On pose $\varphi_h(t) = f(a + th)$.

Définition 1.1. On dit que f est **dérivable en a selon le vecteur h** lorsque φ_h est dérivable en 0. On pose alors :

$$D_h f(a) = \varphi'_h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}.$$

Ce scalaire (ou vecteur si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$) est appelé la **dérivée de f en a selon le vecteur h** .

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy^2$. Calculons $D_{(a,b)}f(1, 1)$.

On construit $\varphi_{(a,b)}(t) = f(1 + ta, 1 + tb) = (1 + ta)(1 + tb)^2$, d'où :

$$\frac{f(1 + ta, 1 + tb) - f(1, 1)}{t} = \frac{(1 + ta)(1 + 2tb + t^2b^2) - 1}{t} = (2b + a) + (2ab + b^2)t + ab^2t^2.$$

Cette quantité admet une limite en 0, et $D_{(a,b)}f(1, 1) = a + 2b$.

Dérivées partielles

Définition 1.2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base fixée de $\mathbb{R}^n$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On dit que f admet une **dérivée partielle en a selon la j -ième variable** (ou selon x_j) lorsque f admet une dérivée en a selon le vecteur e_j . On note :

$$D_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}.$$

Remarque. Malheureusement, cette définition ne suffit pas : une fonction peut admettre des dérivées selon tout vecteur en un point sans être continue en ce point. Par exemple, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ y & \text{sinon,} \end{cases}$$

admet des dérivées selon tout vecteur en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, $f(t^3, t) = \frac{1}{t} \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Exemple. Dans la pratique, le calcul d'une dérivée partielle revient à considérer les autres variables comme des constantes. Ainsi, pour $f(x, y) = x^3 + 2x^4y^3 + 5y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 8x^3y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x^4y^2 + 5.$$

Règles de calcul des dérivées partielles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, f et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en a . Alors :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ admet des dérivées partielles en a et $\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_j} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_j}$.
- fg admet des dérivées partielles en a et $\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$.
- Si f ne s'annule pas, $\frac{\partial(1/f)}{\partial x_j}(a) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)/f^2(a)$.
- Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $f(\Omega) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ admet des dérivées partielles en a et $\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_j}(a) = \varphi'(f(a))\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Fonctions de classe C^1

Définition 1.3. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **de classe C^1** si ses dérivées partielles existent en tout point de Ω et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues sur Ω .

Développement limité à l'ordre 1

Notation. Soit $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$). On écrit $\varphi(h) = o(\|h\|^k)$ au voisinage de 0 s'il existe $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 telle que $\varphi(h) = \|h\|^k E(h)$.

Théorème 1.4. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 . Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point $a \in \Omega$:

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|h\|).$$

Corollaire 1.5. Si f est C^1 sur Ω , alors f est continue.

Démonstration. Conséquence directe de l'existence du DL à l'ordre 1. □

Différentielle

Définition 1.6. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 , et $a \in \Omega$. La **différentielle de f en a** , notée $df(a)$, est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$h \mapsto \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Remarque. Par abus de langage (analogie avec le produit scalaire), on note $df(a) \cdot h$ plutôt que $df(a)(h)$.

Règles de calcul des différentielles

Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 . Alors :

- $d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a)$.
- $d(fg)(a) = df(a)g(a) + f(a)dg(a)$.
- Si f ne s'annule pas : $d(1/f)(a) = -df(a)/f^2(a)$.
- Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 et $f(\Omega) \subset I$: $d(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) df(a)$.

Démonstration. Pour la composition : les dérivées partielles de $\varphi \circ f$ existent et $\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_j} = (\varphi' \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_j}$, qui est continue car produit de fonctions continues. $\square$

Exemple. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g(x, y) = f(x^2 + xy + y^2)$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Alors g est C^1 et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (2x + y)f'(x^2 + xy + y^2), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (2y + x)f'(x^2 + xy + y^2).$$

Règle de la chaîne

Théorème 1.7. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 et $x_1, \dots, x_n$ des fonctions dérivables sur I telles que $\forall t \in I, (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega$. Alors la fonction $g : t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est dérivable sur I et :

$$g'(t) = \sum_{j=1}^n x'_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Remarque. De façon équivalente : si $\gamma : I \rightarrow \Omega$ est dérivable et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 , alors $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe

Théorème 1.8. Soit Ω un ouvert convexe non vide (Un ensemble est convexe si, en reliant deux quelconques de ses points par un segment, ce segment reste entièrement dans l'ensemble). Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est C^1 et $df = 0$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si f est constante, elle est C^1 et toutes ses dérivées partielles sont nulles.

($\Leftarrow$) Soient $a, b \in \Omega$. Posons $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans Ω (par convexité). Alors $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, donc $f \circ \gamma$ est constante et $f(a) = f(b)$. $\square$

Extrema

Gradient. (On suppose ici que E est un espace euclidien.)

Définition 1.9. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. La différentielle $df(a)$ est une forme linéaire sur E , donc il existe un unique vecteur de E , noté $\text{grad } f(a)$, tel que :

$$\forall h \in E, \quad df(a)(h) = (\text{grad } f(a) \mid h).$$

Existence

On cherche un vecteur $v \in E$ tel que :

$$\forall h \in E, \quad \varphi(h) = (v \mid h).$$

Écrivons v dans la base orthonormée :

$$v = \sum_{j=1}^n v_j e_j.$$

Alors, comme la base est orthonormée $((e_i \mid e_j) = \delta_{ij})$, on a :

$$(v \mid h) = \left(\sum_{j=1}^n v_j e_j \mid \sum_{i=1}^n h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j h_i (e_j \mid e_i) = \sum_{i=1}^n v_i h_i.$$

Pour que l'on ait $\varphi(h) = (v \mid h)$ pour tout h , il suffit donc de choisir :

$$v_i = \lambda_i = \varphi(e_i), \quad \text{pour tout } i.$$

Ainsi, le vecteur

$$v = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i$$

vérifie bien :

$$\forall h \in E, \quad \varphi(h) = (v \mid h).$$

Unicité

Supposons qu'il existe deux vecteurs v et v' dans E tels que :

$$\forall h \in E, \quad (v \mid h) = (v' \mid h).$$

En prenant successivement $h = e_1, e_2, \dots, e_n$ (les vecteurs de la base orthonormée), on obtient :

$$(v \mid e_i) = (v' \mid e_i) \quad \text{pour tout } i.$$

Mais $(v \mid e_i)$ est exactement la i -ième coordonnée de v dans la base orthonormée. Donc toutes les coordonnées de v et v' coïncident. Par conséquent :

$$v = v'.$$

Conclusion

Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E , alors $\text{grad } f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$ (noté aussi $\nabla f(a)$).

Exercice n°1

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ (avec E espace euclidien de dimension finie).

1. Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.
2. Montrer que $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\text{grad } f(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Pour $x \neq 0$ et $h \in E$:

$$\|x + h\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | h) + \|h\|^2,$$

donc $f(x + h) = f(x) \left(1 + \frac{2(x | h)}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\right)^{1/2}$. Or $\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$, d'où :

$$f(x + h) = f(x) + \frac{(x | h)}{\|x\|} + o(\|h\|),$$

ce qui montre que f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et que $\text{grad } f(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Extrema locaux

Définition 1.10. La fonction f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en $a \in U$ lorsque :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in B(a, r) \cap U, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

Définition 1.11. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On dit que a est un **point critique** de f si $df(a) = 0$.

Théorème 1.12. Soit f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, différentiable en $a \in U$. Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f .

Démonstration. Supposons que f admette un maximum local en a . Comme U est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset U$ et $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in B(a, \eta)$.

Soit $h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ et $\varphi : t \mapsto f(a + th)$, définie sur $\left]-\frac{\eta}{\|h\|}, \frac{\eta}{\|h\|}\right[$. La fonction φ admet un maximum en 0, est dérivable en 0 (car f est C^1), donc $\varphi'(0) = df(a)(h) = 0$. Comme cela vaut pour tout $h \neq 0$, on conclut $df(a) = 0$. $\square$

Exemple. Déterminons les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto 3x + x^2 + xy + y^2$.

f est polynomiale, donc continue. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, tout extremum ne peut être atteint qu'en un point critique. On résout :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 + 2x + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (-2, 1).$$

En ce point : $f(-2 + h, 1 + k) = f(-2, 1) + h^2 + hk + k^2 = f(-2, 1) + \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4} \geq f(-2, 1)$.

Donc $(-2, 1)$ est un **minimum global**. Il n'y a pas de maximum global car $f(0, t) = t^2 \rightarrow +\infty$.

Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 1.13. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Lorsqu'elle existe, la fonction $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ quand $i = j$).

Définition 1.14. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **de classe C^2** si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont définies et C^1 .

Théorème 1.15. Si f est C^2 , alors f est C^1 .

Démonstration. Si f est C^2 , toutes les dérivées partielles existent et sont C^1 , donc continues. $\square$

Opérations algébriques

Les combinaisons linéaires, produits, inverses (si $f \neq 0$) et compositions $\varphi \circ f$ de fonctions C^2 sont C^2 (mêmes règles qu'en C^1).

Théorème de Schwarz (admis)

Théorème 1.16 (Schwarz). Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , alors pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Exercice n°2

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
2. Montrer l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
3. Conclure.

Pour $x \neq 0$: $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

On calcule ensuite $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pour $y \neq 0$ et l'on trouve $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$. Un calcul analogue donne $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

Ces dérivées croisées étant différentes, le théorème de Schwarz implique que f n'est pas C^2 .

Développement limité à l'ordre 2 (admis)

Théorème 1.17. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in \Omega$. Au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2),$$

où $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}$ est la **matrice hessienne** de f en a (symétrique d'après Schwarz).

Théorème : Formule de Taylor-Young (admis)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$.

On note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

Lorsque $h = (h_1, h_2)$ tend vers 0 de sorte que $a + h \in U$, alors on a :

$$f(a + h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2} (rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|h\|^2)$$

Recherche des extrema locaux d'une fonction de deux variables réelles

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Soit a un point de U , critique pour f .

On note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f admet un minimum local en a .
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f admet un maximum local en a .
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f ne présente pas d'extremum local en a (on parle de point selle).

Remarque : Ce théorème ne permet pas de conclure lorsque $rt - s^2 = 0$.

Démonstration

On a :

$$f(a + h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2} (rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|h\|^2)$$

Or a est un point critique, donc

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} (rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|h\|^2)$$

Soit :

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} (rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|h\|^2)$$

Soit

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

symétrique réelle (conséquence du théorème de Schwarz), on a :

$$J = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

J est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

On a $\det(J) = rt - s^2 = \alpha\beta$ avec $\text{Sp}(J) = \{\alpha, \beta\}$.

Si $rt - s^2 > 0$, alors α, β sont du même signe. Si $\text{tr}(J) > 0$ ou $\text{tr}(J) < 0$ et ici, α, β sont positives. Donc J est définie positive, et il s'agit d'un minimum.

On termine la démonstration par des considérations analogues !

Exercice « classique »

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

Montrer que f admet $(0, 3)$ comme minimum local.

II. Cadre général : applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Dans tout le paragraphe, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ et F le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé $\mathbb{R}^m$, U désigne un ouvert de E .

Applications différentiables

Lemme 2.1. Soit $a \in U$. S'il existe une application linéaire $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|),$$

alors L_a est **unique**. On l'appelle **application linéaire tangente à f en a** .

Démonstration. Supposons $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant toutes deux la relation. Alors $(L_1 - L_2)(h) = o(\|h\|)$. Pour $x \in E$ fixé et $t \rightarrow 0$:

$$\frac{(L_1 - L_2)(tx)}{\|tx\|} = \frac{(L_1 - L_2)(x)}{\|x\|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

donc $(L_1 - L_2)(x) = 0$ pour tout x , et $L_1 = L_2$. □

Définition 2.2. On dit que f est **différentiable en a** lorsque les conditions du lemme précédent sont remplies. L'application linéaire tangente est notée $df(a)$ et appelée **différentielle de f en a** :

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|).$$

Exemples.

- Pour f à une variable réelle : $df(a)(h) = h f'(a)$.
- Si f est la restriction à un ouvert U d'une application linéaire de E dans F , alors $df(a) = f$ pour tout $a \in U$.

Propriétés des applications différentiables

Proposition 2.3. Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Démonstration. Il existe $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$. Comme L_a est continue en dimension finie, $L_a(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, donc $f(a + h) \rightarrow f(a)$. □

Proposition 2.4. Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées selon tout vecteur h , et $D_h f(a) = df(a)(h)$.

Démonstration. Soit $\gamma : t \mapsto a + th$, à valeurs dans Ω au voisinage de 0 (car Ω est ouvert). Alors $D_h f(a) = (f \circ \gamma)'(0) = df(a) \cdot \gamma'(0) = df(a)(h)$. □

Proposition 2.5 (Combinaison linéaire). Si $f, g : U \rightarrow F$ sont différentiables en a et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et :

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

Théorème 2.6 (Règle de la chaîne). Soit $f : U \rightarrow V$ différentiable en $a \in U$ (où $U \subset E$, $V \subset F$ ouverts) et $g : V \rightarrow G$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Proposition 2.7. Soit $B : F_1 \times F_2 \rightarrow G$ une application bilinéaire. Si $f : U \rightarrow F_1$ et $g : U \rightarrow F_2$ sont différentiables en a , alors $B(f, g)$ est différentiable en a et :

$$d(B(f, g))(a)(h) = B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h)).$$

Proposition 2.8. Soit $f : U \rightarrow F$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ une base de F . En notant $f = \sum_{i=1}^m f_i b_i$, f est différentiable en a si et seulement si chaque f_i est différentiable en a , et dans ce cas :

$$df(a)(h) = (df_1(a)(h), \dots, df_m(a)(h)).$$

Matrice jacobienne

Définition 2.9. Soit $f : U \rightarrow F$ de classe C^1 avec $U \subset E$. Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (b_1, \dots, b_n)$ des bases de E et F . La **matrice jacobienne** de f en a , notée $J_f(a)$, est la matrice de $df(a)$ dans ces bases :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Si $E = F = \mathbb{R}^n$, le **jacobien** $j_f(a) = \det J_f(a)$.

Proposition 2.10. Si $g : V \rightarrow G$ est différentiable en $f(a)$ et $f : U \rightarrow V$ est différentiable en a , alors :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a), \quad j_{g \circ f}(a) = j_g(f(a)) \cdot j_f(a).$$

Exemples.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x + y)$. Les dérivées partielles existent et sont continues, donc f est C^1 . Sa jacobienne est $J_f = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\varphi : \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$. La jacobienne est $J_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$.

Applications de classe C^1

Définition 2.11. $f : U \rightarrow F$ est dite **continûment différentiable** ou **de classe C^1** sur U si elle est différentiable sur U et si df est continue sur U .

Théorème 2.12. f est de classe C^1 sur U si et seulement si les dérivées partielles de f (relativement à une base de E) existent en tout point de U et sont continues sur U .

Proposition

Soit $f : U \rightarrow F$.

Soit $b = (b_1, \dots, b_n)$ une base fixée de F .

Soit $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées de f relativement à cette base :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) b_i$$

Alors f est de classe C^1 sur U si et seulement si $f_1, \dots, f_n$ sont toutes de classe C^1 sur U .

Dans ce cas, pour tout vecteur h de E , pour tout x de U ,

$$D_h f(x) = \sum_{i=1}^n D_h f_i(x) b_i$$

Corollaire

Dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}^n$, et b est sa base canonique, on a,

$$\forall x \in U, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

On obtient : f est de classe C^1 sur U si et seulement si les applications coordonnées sont toutes de classe C^1 sur U . Dans ce cas, les coordonnées des dérivées partielles sont les dérivées partielles des coordonnées.

Proposition 2.13. Les fonctions de classe C^1 de U dans F forment un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $C^1(U, F)$. La composée de deux fonctions C^1 est C^1 . Les polynômes sont C^1 sur $\mathbb{R}^n$; les fractions rationnelles sont C^1 sur leur ensemble de définition.

Définition / théorème

L'application

$$\varphi :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}, \quad (\rho, \theta) \mapsto (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

est de classe C^1 .

Si (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle repère polaire le repère $(0, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ défini par :

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \quad \text{et} \quad \vec{v}_\theta = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$$

Théorème

Si f est une fonction C^1 sur un ouvert Ω inclus dans V à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $F = f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\varphi^{-1}(\Omega)$.

On a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{v}$$

Démonstration : En exercice, faisant appel à la dérivée d'une composée...

III. Vecteur tangent et plan tangent

Définition 3.1. Soit $X \subset E$ et $x \in X$. On dit que $v \in E$ est **tangent à X en x** s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$, dérivable en 0, à valeurs dans X , tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Exemple. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, et $X = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$. Les vecteurs tangents à X en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sont les $(a, 0, a \partial_x f) + (0, b, b \partial_y f)$. Le **plan tangent à X en M_0** a pour équation :

$$(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - (Z - z_0) = 0.$$

Exemple.[Exercice classique] Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$. La surface S est l'ensemble $\{f = 0\}$. Vérifier que l'équation du plan tangent à S en $(1, 1, 1)$ est $x - 5y + 2z + 2 = 0$.

Proposition 3.2. Soit E euclidien, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, $k \in f(U)$ et $X = \{M \in U, f(M) = k\}$. En tout point $x \in X$, les vecteurs tangents à X sont orthogonaux à $\text{grad } f(x)$.

IV. Dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 et extrema

Définition

Soit U un ouvert de E .

Soit $f : U \rightarrow F$ une application.

Soit $a \in U$, soit $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, p\}^k$.

On dit que f admet une dérivée partielle k -ième en a par rapport aux variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ lorsque :

- on a $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right)$, etc. qui existent sur un voisinage de a ;
- et $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \dots \right) \right) (a)$ existe.

Dans ce cas, l'élément

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \dots \right) \right) (a)$$

est noté

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$$

Définition

Soit U un ouvert de E , et $f : U \rightarrow F$ une application.

Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

La fonction f est dite $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert U , si elle admet des dérivées partielles sur U , jusqu'à l'ordre k inclus par rapport à toutes les variables et si ces dérivées partielles sont continues sur U .

La fonction f est dite $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert U , si elle admet des dérivées partielles sur U , jusqu'à l'ordre k inclus par rapport à toutes les variables et si ces dérivées partielles sont continues sur U pour tout entier k .

Proposition

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. L'application f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si f est $\mathcal{C}^1$ et ses fonctions dérivées partielles sont $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U .

Proposition

Soit $b = (b_1, \dots, b_n)$ une base fixée de F .

On note $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées de f , ainsi

$$\forall x \in U, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) b_i$$

La fonction $f : U \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U , si et seulement si chacune des applications coordonnées est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

Proposition

Soit f et $g : U \rightarrow F$, deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert U , alors pour tout couple de réels (α, β) , la fonction $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

Théorème

Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow G$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $f(U) \subset V$ (ouvert).

Alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^k$ sur U .

Théorème de Schwarz (admis)

Soit U un ouvert de E .

Soit f une application de U dans F , de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

Alors pour tout point a de U :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Remarque : En particulier, pour une fonction $f : U \rightarrow F$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, alors on a :

$$\forall a \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Corollaire

Soit $f : U \rightarrow F$ une application $\mathcal{C}^k$ sur U .

Alors les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k ne dépendent pas de l'ordre de dérivation.

V. Difféomorphismes

Définition 5.1. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts et $k \geq 1$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de U sur V si f est une bijection de U sur V , f est $\mathcal{C}^k$ et f^{-1} est $\mathcal{C}^k$.

Changement de variables

Théorème 5.2 (admis). Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme. Pour toute fonction f intégrable sur V :

$$\int_V f(y) \, d\lambda(y) = \int_U f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| \, d\lambda(x).$$

Exemple. Retrouver $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ en utilisant l'intégrale double $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \, dy$ et le passage en coordonnées polaires (théorème de Fubini).

Exercice n°3

Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer $I = \iint_{\Delta} \frac{dx \, dy}{1 + x^2 + y^2}$ par passage en coordonnées polaires.

En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $0 \leq r \leq 1$ et $\theta \in [0, \pi/2]$, on obtient après calculs : $I = \frac{\pi \ln 2}{4}$.

Proposition 5.3. Si f est un C^k -difféomorphisme de U sur V et $b = f(a)$, alors $df(a)$ est un isomorphisme vérifiant $(df(a))^{-1} = d(f^{-1})(b)$.

Démonstration. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_V$ implique $df(a) \circ d(f^{-1})(b) = \text{Id}_F$. □

Remarque. L'existence d'un C^k -difféomorphisme de U sur V implique $\dim E = \dim F$.

Théorème 5.4 (admis). Soit U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$ injective de classe C^k . Alors $f(U)$ est un ouvert et f est un C^k -difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si $df(a)$ est inversible pour tout $a \in U$.

VI. Applications aux équations aux dérivées partielles

Exemple.[Exercice] Soit $a \in \mathbb{R}$. On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a. \quad (E)$$

1. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$ est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. Montrer que g est C^1 .
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g vérifie $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{a}{2}$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. En déduire toutes les solutions de (E).

VII. Théorème de Poincaré (hors programme)

Définition 7.1. Une forme différentielle ω définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dite **exacte** s'il existe $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ telle que $\omega = df$.

Elle est dite **fermée** si $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$ est de classe C^1 et vérifie $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$ pour tout (i, j) .

Un ouvert U est **étoilé** s'il existe un point $x_0 \in U$ tel que pour tout $x \in U$, le segment $[x_0, x]$ reste dans U .

Théorème 7.2 (Poincaré — admis). Sur un ouvert étoilé, toute forme différentielle fermée est exacte.

Exercices

Exercice n°1 (*Oraux de concours*) On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = x^2 + x^2y + y^3.$$

1. Montrer que f admet un point critique, mais que ce n'est pas un extremum.
2. Montrer que f possède sur le disque fermé unité un maximum et un minimum.

Exercice n°2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, montrer l'existence et calculer $D_{(u,v)}f(0, 0)$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, calculer $f(t, t^2)$.
3. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice n°3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$. Montrer que f admet un prolongement de classe C^1 à $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$, une fonction de classe C^1 . On pose $g(x, y) = f(x + y, xy)$. Calculer en tout point (x, y) les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .

Exercice n°5

 (*Oraux de concours*)

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.

1. Justifier que f est C^1 .
2. Déterminer la différentielle de f en tout point $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a) Justifier que $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \text{tr}(^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$ (norme subordonnée au produit scalaire précédent).

4. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \text{tr}(M^3)$. Justifier que f est C^1 et déterminer sa différentielle en tout point M .

Exercice n°6

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^3 - xy$ possède-t-elle un extremum en $(0, 0)$?

Exercice n°7

Soit (S) la surface d'équation $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Déterminer l'équation du plan tangent à (S) au point $A\left(1, 3, \frac{3}{2}\right)$.

Exercice n°8

On définit sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ et $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

- Vérifier que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Calculer de deux façons $\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} f(\cos t, \sin t) dt$ et aboutir à une contradiction.

Exercice n°9

Soit $\varphi : M \mapsto M^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que φ est C^1 sur $GL_n(\mathbb{R})$.
 - Pour $t \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$, montrer que $(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij}$.
 - Déterminer $(I_n + tE_{ii})^{-1}$.
 - En déduire $d\varphi(I_n)(E_{ij}) = -E_{ij}$, puis $d\varphi(I_n)(A) = -A$.
- Déterminer $d\varphi(M)$ pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice n°10

On pose $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2 - 2xy, y)$.

- Montrer que U est un ouvert.
- Montrer que f est injective.
- Préciser $V = f(U)$ et montrer que V est un ouvert.
- Montrer que f est bijective de U sur V .
- Montrer que f est C^1 sur U et que sa bijection réciproque g est C^1 sur V .
- Donner la différentielle de g au point $(u, v) \in V$.

Exercice n°11

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$. On cherche toutes les fonctions f de classe C^1 sur U telles que :

$$\forall (x, y) \in U, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2.$$

- Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Montrer que φ est un C^1 -difféomorphisme de U sur $\text{Im}(\varphi)$.

3. En posant $g(u, v) = f \circ \varphi^{-1}(u, v)$, résoudre le problème.

Exercice n°12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \alpha.$$

On utilise le changement de variables $u = 2x + y$, $v = 2x - y$.

1. Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto (2x + y, 2x - y)$ est un C^2 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\text{Im}(\varphi)$.
2. En posant $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{4}, \frac{u-v}{2}\right)$, déterminer E .

Exercice n°13

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Déterminer toutes les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

1. Montrer que $\varphi : (u, v) \mapsto (ue^v, e^{-v})$ est un C^1 -difféomorphisme de Ω sur $\text{Im}(\varphi)$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice n°14

Soit $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u - v > 0\}$ et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (u^2 + v^2, u + v)$. Montrer que φ est un C^1 -difféomorphisme de U sur un ouvert V à préciser.

Exercice n°15

Soit $\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + z^2, y + x^2, z + y^2)$.

1. Montrer que φ est un C^2 -difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sur $\text{Im}(\varphi)$.
2. En notant x, y, z les composantes de φ^{-1} , calculer $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$.

Exercice n°16 (*Oraux de concours*) Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_a(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $F_a(x, y)$ en fonction de x, y et a .
2. Vérifier que cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles.
Calculer $F_a(x_0, y_0)$.
4. Calculer, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre :

$$G_a(x, y) = F_a(x, y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$$

et préciser son signe.

5. En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$.
Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum global et donner sa valeur notée $M(a)$.
6. Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

Exercice n°17 (*Oraux de concours*) Calculer :

$$\iint_{\Delta} (x^3 - 2y) \, dx \, dy$$

avec

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = au \cos \theta$ et $y = bu \sin \theta$.

Exercice n°18

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite **harmonique** si $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Elle est dite **radiale** sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

1. Montrer que si f est C^3 et harmonique, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. Montrer que si f est C^3 et harmonique, alors $h : (x, y) \mapsto x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ est harmonique.
 - a) Montrer que si f est C^2 et radiale, alors φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
 - b) En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.

Exercice n°19

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On note S la sphère unité et B la boule unité ouverte. On suppose que f est constante sur S . Démontrer l'existence de $x_0 \in B$ tel que $df(x_0) = 0$.

Exercice n°20

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$.

Exercice n°21

Justifier que la fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice n°22

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. En quels points l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est-elle différentiable ?
2. Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice n°23

Montrer que l'application $P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt$ définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice n°24

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E .

1. Montrer que $x \mapsto (u(x), x)$ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
2. Montrer que $F : x \mapsto \frac{(u(x), x)}{(x, x)}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.

Exercice n°25

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , croissante, vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On pose $F(x) = f(\|x\|)x$.

1. Montrer que $N : x \mapsto \|x\|$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et exprimer sa différentielle.
2. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.
3. Montrer que $\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(dF(x)(h), h) \geq f(\|x\|)\|h\|^2$.
 - a) Montrer que F est injective (montrer que $t \mapsto t f(t)$ est croissante).
 - b) Montrer que F est surjective (appliquer le TVI à $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \|F(ty)\|$).

Exercice n°26

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y < 2x \text{ et } x < y^2 < 2x\}$. Calculer $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$.

Exercice n°27 https://youtu.be/1K0rE_vAdyk

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

1. Démontrer que f est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Calculer la matrice jacobienne de f en (x_0, y_0) .
3. Est-ce que f réalise un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?