

Chapitre 18 : Calcul intégral

M. Calciano

I. Continuité uniforme

1) Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

2) Théorème de Heine (admis)

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

II. Intégrale des fonctions continues par morceaux

1) Intégrale des fonctions en escalier

a) Définition

Une subdivision de $[a, b]$ est une suite $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ strictement croissante avec $a_0 = a$ et $a_n = b$. On a ainsi :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

b) Vocabulaire

Si tous les points d'une subdivision τ de $[a, b]$ appartiennent à la subdivision σ , on dit que τ est plus fine que σ .

c) Définition

On appelle fonction en escalier sur $[a, b]$ toute fonction φ définie sur $[a, b]$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ vérifiant :

$$\forall k \in 1, n, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, \forall x \in]a_{k-1}; a_k[, \varphi(x) = \lambda_k.$$

On dit que la subdivision σ est subordonnée à φ . On note $E([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$.

FIGURE 1 – Illustration d'une fonction en escalier.

Remarque : Il n'y a pas unicité de la subdivision subordonnée à φ dans la mesure où toute subdivision plus fine sera toujours subordonnée à φ .

d) Définition

Soit $\varphi \in E([a, b], \mathbb{R})$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision subordonnée à φ . On définit l'intégrale de φ sur $[a, b]$ et on note :

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_{[a, b]} \varphi = \sum_{k=1}^n \lambda_k (a_k - a_{k-1}).$$

Remarque/Théorème (admis) : Cette quantité est indépendante de la subdivision choisie.

2) Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux

a) Définition

On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que pour tout indice k de $1, n$:

- La fonction $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue,
 - La fonction $f|_{]a_k, a_{k+1}[} \rightarrow \mathbb{R}$ se prolonge continûment en une fonction de $[a_k, a_{k+1}]$.
- On note $C_m([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

FIGURE 2 – Exemple de fonction continue par morceaux.

b) Approximation d'une fonction continue par morceaux (théorème admis)

Soit $f \in C_m([a, b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in E([a, b], \mathbb{R})^2$ telles que :

$$0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \varphi \leq f \leq \psi.$$

c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors :

$$\inf \left\{ \int_a^b \varphi ; \varphi \in E([a, b], \mathbb{R}), \varphi \geq f \right\} = \sup \left\{ \int_a^b \psi ; \psi \in E([a, b], \mathbb{R}), \psi \leq f \right\}.$$

On définit l'intégrale de f de a à b , notée $\int_a^b f(x) dx$ ou $\int_a^b f$, comme la valeur commune de ces bornes supérieures et inférieures.

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in E([a, b], \mathbb{R})^2$ telles que $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ et $\varphi \leq f \leq \psi$ (c'est la proposition précédente). Pour $\varepsilon = 1/n$, on construit donc deux suites φ_n et ψ_n telles que :

$$\sup_{[a, b]} |f - \varphi_n| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sup_{[a, b]} |f - \psi_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Appelons respectivement α_n et β_n ces bornes supérieures. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$|\varphi_n(x) - \psi_n(x)| = |\varphi_n(x) - f(x) + f(x) - \psi_n(x)| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| + |f(x) - \psi_n(x)| \leq \alpha_n + \beta_n.$$

Or,

$$\left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n \right| \leq \int_a^b |\varphi_n - \psi_n| \leq (b - a)(\alpha_n + \beta_n) \rightarrow 0.$$

III. Propriétés de l'intégrale

1) Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Soient f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Soit $c \in [a, b]$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- **Linéarité :** $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- **Croissance :** Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- **Positivité :** Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

Démonstration : Pour la positivité : il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi, \psi \in E([a, b], \mathbb{R})^2$ telles que $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ et $\varphi \leq f \leq \psi$. Pour ε suffisamment petit, $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi$. On a :

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi,$$

et $0 \leq \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \int_a^b \varepsilon$, donc

$$0 \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq (b - a)\varepsilon.$$

2) Estimation d'intégrales

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On note $m = \inf_{[a, b]} f$ et $M = \sup_{[a, b]} f$.

— **Encadrement d'une intégrale** : $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$.

— **Valeur absolue d'une intégrale** : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

3) Intégrale définie-positive

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si f est identiquement nulle.

Démonstration : Le fait que $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ provient des propriétés du III. et du fait que f soit positive. Pour l'égalité : si f n'est pas identiquement nulle, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) > 0$. Par continuité de f , il existe un intervalle $J \subset [a, b]$ autour de x tel que $f(t) > \frac{f(x)}{2}$ sur J . Par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_J f(x) dx \geq \text{Longueur}(J) \cdot \frac{f(x)}{2} > 0.$$

4) Remarque

En général,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

(voir le chapitre de deuxième année sur le théorème de convergence dominée, entre autres).

IV. Liens primitive et intégrale

1) Définition

Soient $g, G : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que G est une primitive de g sur I si G est dérivable sur I et $\forall x \in I, G'(x) = g(x)$.

2) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Soit f une fonction continue sur I , $a \in I$, et

$$F : I \rightarrow \mathbb{K}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Démonstration : Soit F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Montrons que F est dérivable et que $F' = f$. Pour $x \in I$, la continuité de f en x donne : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y avec $|x - y| < \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. De plus,

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

et

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt.$$

Pour $h > 0$ tel que $h \leq \eta$,

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \varepsilon h.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon,$$

d'où la conclusion.

a) Théorème

Soit $f \in C(I, \mathbb{K})$. Alors f possède des primitives sur I . La fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Démonstration : Penser à une constante près, puis évaluer en a .

b) Théorème fondamental

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ et F une primitive quelconque de f sur I . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration : À une constante près, puis faire le calcul.

c) Calcul d'intégrales

Intégration par parties : soit $(u, v) \in C^1([a, b], \mathbb{K})^2$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Démonstration : Une primitive de $u'v + uv'$ est uv .

d) Changement de variable

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \rightarrow J$ une fonction de classe C^1 , $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Soient $(\alpha, \beta) \in I^2$. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

Démonstration : $f(\varphi(u))\varphi'(u)$ a pour primitive $F \circ \varphi$ où F est une primitive de f .

Exercice

À l'aide du changement de variable $x = \cos t$, déterminer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Déterminer $\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx$.

3) Intégrale d'une fonction paire/impair/périodique

a) Étude selon parité

Soit $f \in C^0([-a, a], \mathbb{R})$. Si f est paire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Si f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

b) Étude selon période

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T -périodique. Alors :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

4) Théorème de la valeur moyenne (admis pour l'instant)

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Démonstration : Elle nécessite de connaître le théorème des accroissements finis. Soit $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ pour $t \in [a, b]$. F est dérivable et $F'(t) = f(t)$. Par le théorème des accroissements finis, pour $t = b$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$, soit $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

5) Primitives de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On a l'équivalence :

f admet des primitives sur $I \iff x \mapsto \Re(f(x))$ et $x \mapsto \Im(f(x))$ admettent des primitives sur I .

On a alors

$$\int f(x) dx = \int \Re(f(x)) dx + i \int \Im(f(x)) dx.$$

Démonstration : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, s'écrivant $f = u + iv$ avec $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ On suppose que f admet une primitive F sur I . F étant à valeurs complexes, on écrit $F = U + iV$ avec $U, V : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et on a :

$$\forall x \in I, U'(x) + iV'(x) = F'(x) = f(x) = u(x) + iv(x).$$

Par identification partie réelle-partie imaginaire, on alors pour tout $x \in I$, $U'(x) = u(x)$ et $V'(x) = v(x)$, c'est-à-dire que u et v admettent des primitives sur I .

$\Leftarrow$ On peut voir ce résultat comme une conséquence de la linéarité de la primitivisation. On suppose que u et v admettent des primitives sur I . Donc $f = u + iv$ admet des primitives sur I .

Exemple

Primitives sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto e^{ix}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{1+ix}$.

6) Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $a, b \in I$. On a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \Re(f(x)) dx + i \int_a^b \Im(f(x)) dx.$$

Ainsi,

$$\Re \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b \Re(f(x)) dx \quad \text{et} \quad \Im \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b \Im(f(x)) dx.$$

Démonstration : C'est une conséquence directe de la proposition 5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ s'écrivant $f = u + iv$ avec $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ respectivement les parties réelles et parties imaginaires de f . Dire que f est continue équivaut à dire que u et v le sont. Ainsi, par le théorème 3, toutes trois admettent des primitives et par la proposition 5, si U et V sont des primitives de u et v , alors $F = U + iV$ sera une primitive de f .

Dès lors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =$$

$$U(b) + iV(b) - (U(a) + iV(a)) = U(b) - U(a) + i(V(b) - V(a)) = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Et puisque $\int_a^b u(x) dx$ et $\int_a^b v(x) dx$ sont des réels, on a donc bien :

$$\Re \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b \Re(f(x)) dx \quad \text{et} \quad \Im \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b \Im(f(x)) dx.$$

Exemple

Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+ix} dx.$$

V. Sommes de Riemann

1) Définition

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Pour tout entier $n \neq 0$, on appelle somme de Riemann d'ordre n associée à f la somme :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right).$$

Remarque : Cette somme correspond à l'intégrale d'une fonction en escalier g telle que $\forall k \in [0, n-1], g|_{[u_k, u_{k+1}[} = f(u_k)$ où u_k est la subdivision de $[a, b]$ de pas $(b-a)/n$.

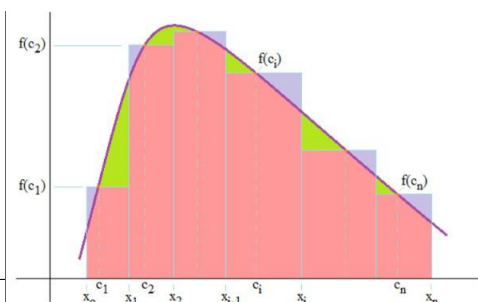
2) Théorème (admis)

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \longrightarrow \int_a^b f \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Et de façon analogue :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \longrightarrow \int_a^b f \quad (n \rightarrow +\infty).$$



Exercice

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

Annexe : quelques primitives

Soit u une fonction dérivable. Voici les primitives usuelles :

1. $\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec $u \in \mathbb{R}$.
2. $\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$, avec $u \in \mathbb{R}^*$.
3. $\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u|$, avec $u \in \mathbb{R}^*$.
4. $\int u' u^\alpha dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, avec $u \in \mathbb{R}^{++}$.
5. $\int u' e^u dx = e^u$, avec $u \in \mathbb{R}$.
6. $\int u' \cos u dx = \sin u$, avec $u \in \mathbb{R}$.
7. $\int u' \sin u dx = -\cos u$, avec $u \in \mathbb{R}$.
8. $\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u$, avec $u \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.
9. $\int u' \cosh u dx = \sinh u$, avec $u \in \mathbb{R}$.
10. $\int u' \sinh u dx = \cosh u$, avec $u \in \mathbb{R}$.
11. $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin u$, avec $u \in]-1, 1[$.
12. $\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u$, avec $u \in \mathbb{R}$.

Quelques méthodes supplémentaires**1) Primitives de fonctions polynômes en $\cos(x)$ et $\sin(x)$**

La méthode la plus générale consiste à linéariser l'expression ou, dans certains cas, d'essayer de se ramener à la dérivée d'une composée.

Exemple : Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$. On a $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, d'où

$$\cos^3 x = \frac{e^{3ix} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x).$$

Donc une primitive est $\frac{1}{12} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$.

2) Primitives de fonctions de la forme $e^{ax} \cos(bx)$

Pour déterminer une primitive de $e^{ax} \cos(bx)$, on peut identifier la fonction à la partie réelle de $e^{ax} e^{ibx} = e^{(a+ib)x}$, puis on prend la partie réelle d'une primitive de $e^{(a+ib)x}$.

3) Les règles de Bioche

Les **règles de Bioche** sont des règles pour calculer des intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus, en les ramenant à des intégrales de fractions rationnelles. Précisément, posons $\omega(x) = F(x) dx$ l'intégrande (avec l'élément différentiel). Alors :

- si $\omega(-x) = \omega(x)$, on pose $t = \cos x$,
- si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on pose $t = \sin x$,
- si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on pose $t = \tan x$,
- si aucune des propriétés n'est vérifiée, on pose $t = \tan(x/2)$.

Rappels : On a alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Exemple : Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$.

4) Décomposition en éléments simples

Proposition : Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $F = \frac{A}{B}$ (appelée fraction rationnelle). Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que

$$F = Q + \frac{R}{B} \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est appelée partie entière de F ; $\frac{R}{B}$ est appelée partie fractionnaire de F .

a) Démontrer la proposition précédente.

b) Déterminer les parties entières de $\frac{X^2 - 5X + 4}{X - 2}$, puis de $\frac{X^4 + 2X^2 + X + 1}{X^2 + 1}$.

Le principe de la décomposition en éléments simples consiste à substituer à une fraction rationnelle une somme de fractions « plus simples ». Le théorème est illustré ci-dessous.

Soit

$$F = \frac{A}{\alpha \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{r_i} \prod_{i=1}^m (X^2 + \alpha_i X + \beta_i)^{\nu_i}}$$

où $A \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ (tous distincts) et pour tout $i : (r_i, \nu_i) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\alpha_i^2 - 4\beta_i < 0$.

Alors F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = Q + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{r_{ij}}{(X - a_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{a_{ij}X + b_{ij}}{(X^2 + \alpha_i X + \beta_i)^j} \right),$$

où $r_{ij}, a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Cette expression est appelée **décomposition en éléments simples** de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Applications : Déterminer les décompositions en éléments simples de :

a) $A = \frac{1}{X(X+1)}.$

b) $B = \frac{X^3}{X^2 - 1}.$

c) $E = \frac{1}{(X+2)(X+1)^2}.$

d) $C = \frac{1}{X(X^2 - 1)(X+2)}.$

e) $D = \frac{X^3}{(X^2 + 1)^2}.$

f) $F = \frac{1}{(X^2 + 2)^2 X^2}.$

VI. Exercices

Exercice n°0

Soit la fraction $F = \frac{1}{X(X+1)}.$

1. Réaliser la décomposition en éléments simples.
2. En déduire une simplification pour $n \geq 1$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$
3. Même question avec $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$

Exercice n°1

1. Démontrer que $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + K$ avec $K \in \mathbb{R}.$
2. En déduire $\int \frac{x}{2x^2 + 5x + 5} dx.$

Exercice n°2

Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = 0.$

1. Démontrer que f s'annule au moins une fois.
2. On suppose de plus que $\int_0^1 t f(t) dt = 0.$ Démontrer que f s'annule au moins deux fois.
(On pourra raisonner par l'absurde en affirmant que f ne s'annule qu'une seule fois et considérer $\int_0^1 (t - t_0) f(t) dt$ pour un réel $t_0 \in [0, 1]$ bien choisi.)

Exercice n°3

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \sinh(x).$
2. Démontrer que f admet une réciproque sur $\mathbb{R}.$
3. Déterminer $(f^{-1})'(x)$ en fonction de $x.$
4. Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx.$ À l'aide d'une mise sous forme canonique, d'un changement de variable et des questions précédentes, calculer $I.$
5. Calculer $J = \int_0^1 \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + x\sqrt{x^2 + 1} + 1} dx.$

Exercice n°4 (Lycée Wallon)

On pose pour tout entier naturel $n,$

$$I_n = \int_1^e \ln^n(x) dx.$$

1. Calculer I_0 et $I_1.$
2. Soit $n \in \mathbb{N}.$ Établir une relation liant I_n et $I_{n+1}.$
3. En déduire que pour tout entier naturel $n, 0 < I_n < \frac{e}{n+1}.$
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = e.$

Exercice n°5

1. En procédant par IPP, calculer :

a) $I_1 = \int_0^{\pi/2} t^2 \sin(t) dt.$

b) $I_2 = \int_0^{\pi/3} \frac{t}{\cos^2(t)} dt$ et $I_3 = \int_0^{\pi/2} e^t \cos(t) dt.$

2. En procédant à des changements de variables, calculer $I_4 = \int_0^1 \frac{1}{(2t-3)^5} dt.$

3. Le but de la question est de calculer $J = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin(x)}.$

a) Calculer $K = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt.$

b) Soit $x \in [0, \pi/2]$. On pose $t = \tan(x/2)$. Montrer que $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$

c) Calculer J à l'aide du changement de variable $t = \tan(x/2)$.

Exercice n°6

1. Pour x réel, linéariser $\sin^4 x$.

2. En déduire les primitives de $x \mapsto \sin^4 x$.

Exercice n°7

1. Calculer $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx.$

2. a) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx.$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + 2nk + 3n^2}.$

3. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(1+x) - \ln(x)}{x^2} dx$ (on posera $y = 1/x$).

Exercice n°8

Pour n entier naturel, on définit la suite $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx.$

1. Montrer que cette suite est positive et décroissante.

2. Expliquer pourquoi cette suite converge.

3. Démontrer que $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}.$

4. Démontrer que $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$

5. En déduire la valeur de la limite.

Exercice n°9

Pour n entier naturel non nul, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} dx.$$

1. Justifier l'inégalité $0 \leq I_n \leq J_n$.
2. Justifier l'inégalité $0 \leq J_n - I_n \leq \frac{1}{2n(2n+1)}$.
3. À l'aide d'un changement de variable, calculer J_n (on remarquera que $x^{2n-1} = x^n x^{n-1}$).
4. Dédire des questions précédentes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{J_n}$.

Exercice n°10

1. a) Montrer que pour k entier non nul, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$.
b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. Montrer que pour tout $n > 0$,

$$2\sqrt{n} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Exercice n°11

Pour n entier, on pose $f : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $h : x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. Exprimer pour $x \neq 0$, $h(1/x)$ en fonction de $h(x)$.
3. En déduire pour $x \neq 0$, une relation entre $f(1)$, $f(1/x)$ et $f(x)$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en fonction de $f(1)$.

Exercice n°12

Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.
2. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$.
3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.

Exercice n°13

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $R(X) = \frac{1}{X^2 - X - 2}.$

2. $S(X) = \frac{2X}{X^2 + X + 1}.$

3. $T(X) = \frac{X^4 + X^2 + 2}{X^3 + 5X^2 + 8X + 4}.$

Exercice n°14

Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^3(x) dx.$

Exercice n°15

Soit $T > 0$ et f une fonction continue et T -périodique sur $\mathbb{R}$. On pose

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt - \int_0^T f(t) dt.$$

Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer F' . En déduire que l'intégrale de f sur une période est constante.

Exercice n°16 (oraux concours)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{t} \text{ pour } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 1.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt.$$

- Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f .
- Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variation de f .

Exercice n°17

Déterminer les primitives de :

1. $x \mapsto \sin(4x)e^{3x}.$

2. $x \mapsto \frac{1}{\sinh(x)}.$