

Chapitre 8 : Algèbre générale

M. Calciano

I. Relation dans un ensemble

1) Définition

Une **relation** $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\mathbf{E}$ est une propriété pour certains couples (x, y) de E^2 et fausse pour d'autres.

Lorsque le couple (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$.

— *Exemples :*

— La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

— La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$, $m\mathcal{R}n \iff m$ divise n .

2) Autres définitions

— Une relation $\mathcal{R}$ est « **réflexive** » si pour tout x de E , $x\mathcal{R}x$.

— Une relation $\mathcal{R}$ est « **symétrique** », si pour tout x, y de E , $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.

— Une relation $\mathcal{R}$ est « **transitive** » si pour tout x, y, z de E , $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.

— Une relation $\mathcal{R}$ est « **antisymétrique** » si pour tout x, y de E , $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \implies x = y$.

Remarque : L'antisymétrie n'est pas l'inverse de la symétrie ! Et une relation peut être symétrique et antisymétrique (par exemple la relation $=$).

3) Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence sur un ensemble $\mathbf{E}$** , toute relation réflexive, symétrique et transitive.

4) Classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$, une relation d'équivalence sur un ensemble E , et $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence, notée $cl(x)$** , le sous-ensemble de E constitué des éléments en relation avec x .

Ainsi :

$$cl(x) = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}$$

Remarque n°1 : Soit $(x, y) \in E^2$, muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Alors, soit $y \in cl(x)$ et $cl(x) = cl(y)$, soit x n'est pas en relation avec y et $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$.

— *Exemple :* On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation de congruence : les entiers x et y sont congrus modulo n (entier non nul) si leur différence est un multiple de n :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = y + kn.$$

Dans ce cas, on note : $x \equiv y [n]$. Ainsi $19 \equiv 4 [5]$, mais aussi $19 \equiv 9 [5]$, et une infinité d'autres possibilités !

Remarque n°2 : L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle **l'ensemble quotient de $\mathbf{E}$ par $\mathcal{R}$** , et se note $E/\mathcal{R}$.

II. Relation d'un ensemble vers un autre ensemble

1) Définition

Une application f est définie par :

- un ensemble de départ ou de définition E ,
- un ensemble d'arrivée F ,
- la donnée pour tout x de E , d'un unique élément de F noté $f(x)$ appelé image de x par f .

On parle d'**application** (ou de fonction) de E dans F . On note :

$$f: E \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x).$$

2) Notation

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E .

3) Définitions

- Soit E un ensemble et I un ensemble fini. On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E . On note $(x_i)_{i \in I}$.
- Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle **indicatrice de A** et note 1_A la fonction de E dans $\{0; 1\}$ définie par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

4) Composée

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g de F dans G . On appelle **composée de f par g** , notée $g \circ f$, l'application de E dans G définie par :

$$g \circ f: E \rightarrow G, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

5) Définitions

- **Identité** : Soit E un ensemble. On appelle **application identité** de E , notée Id_E , l'application qui à tout élément x de E associe x .
- **Restriction** : Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E . On appelle **restriction de f à A** et on note $f|_A$ l'application $A \rightarrow F, x \mapsto f(x)$.

III. Image directe, réciproque

1) Définitions (Rappels)

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F .

- Soit A une partie de E . On appelle **image directe de A par f** , et on note $f(A)$, le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

- Soit B une partie de F . On appelle **image réciproque de B par f** , et on note $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Remarque : À retenir :

- $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x).$
- $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$

2) Applications injectives, surjectives, bijectives (Rappels)

- **Application injective :** Soit f une application de E dans F . On dit que f est une **application injective ou une injection** lorsque tout élément de F possède au plus un antécédent par f , c'est-à-dire :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Remarque : De façon équivalente, f est injective si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

--

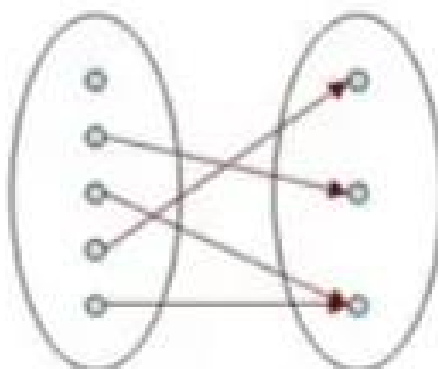
--

Théorème : La composée de deux applications injectives est injective. *Démonstration :* Soient f et g deux applications définies respectivement sur I et J tels que $f(I) \subset J$.

Si $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, alors par injectivité de g , on a $f(x) = f(x')$, puis $x = x'$ par injectivité de f .

- **Application surjective :** Soit f une application de E dans F . On dit que f est une **application surjective ou une surjection** lorsque tout élément de F possède au moins un antécédent par f , c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$



Surjection : chaque élément de F a *au moins* un antécédent

Théorème : Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective. *Démonstration* : Soit $z \in G$. Alors il existe un antécédent $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Mais f est surjective, donc il existe un antécédent $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où $z = g \circ f(x)$.

- **Application bijective** : Soit f une application de E dans F . On dit que f est une **application bijective** ou une **bijection** lorsque f est à la fois injective et surjective. Une autre façon de le dire : tout élément de F possède un unique antécédent par f , c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x).$$

- **Application réciproque** : Soit f une bijection de E dans F . On appelle **application réciproque** ou **bijection réciproque** de f , notée f^{-1} , l'application de F dans E qui à tout élément y de F associe son unique antécédent x de E . Ainsi :

$$\forall (x, y) \in E \times F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Proposition : Soit f une bijection de E dans F et f^{-1} son application réciproque. Alors :

$$f \circ f^{-1} = Id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = Id_E.$$

Théorème : Une application f de E dans F est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E vérifiant :

$$f \circ g = Id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = Id_E.$$

On a alors $g = f^{-1}$. *Démonstration* : Soit $x \in E$. Posons $f(x) = y$. Alors $g \circ f(x) = g(y)$, et $x = g(y)$.

Ainsi de $x = g(y)$, on a $f(x) = f \circ g(y)$. Mais $f \circ g(y) = y$ car $f \circ g = Id$.

Et y admet $g(y)$ comme unique antécédent par f .

Théorème : Soit f une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G . Alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration : On utilise l'associativité de la composition ! Ainsi :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ f = Id_E,$$

et on conclut avec la propriété précédente.

3) Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinalité

On suppose ici que E et F sont des ensembles finis.

- Si $f: E \rightarrow F$ est injective, alors $\text{card}(F) \geq \text{card}(E)$.
- Si $f: E \rightarrow F$ est surjective, alors $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.
- Si $f: E \rightarrow F$ est bijective, alors $\text{card}(F) = \text{card}(E)$.

Théorème : Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $f: E \rightarrow F$ une application. Alors :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}.$$

Démonstration :

- On suppose f bijective. Alors de façon évidente, f est injective.
- On suppose f injective. Comme $f: E \rightarrow f(E)$ est bijective, on a $\text{card}(E) = \text{card}(f(E))$. Si f n'est pas surjective, alors $\text{card}(F) > \text{card}(f(E))$, d'où $\text{card}(E) > \text{card}(f(E))$, absurde.
- On suppose f surjective. On a donc $f(E) = F$, et $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F) = \text{card}(E)$. Si f n'est pas injective, alors $\text{card}(F) < \text{card}(E)$, absurde.

IV. Exercices

Exercice n°1

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

- 1) Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$.
- 2) Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$.
- 3) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{x^2+1}$. (Indication : On constatera que $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x = x^4 + x^2 + (x-1)^2$.)

Exercice n°2

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x - 1$.

- 1) Déterminer $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.
- 2) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice n°3

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F , et g une application de F dans G .

- 1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- 2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- 3) On suppose que $E = G$ et que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice n°4

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y) = (x - 4y, 2x + 3y)$.

- 1) Montrer que f est bijective.
- 2) Déterminer $f(\Delta)$ avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$.
- 3) Déterminer $f^{-1}(\Delta)$.

Exercice n°5

Soit $f \in F(E, F)$ et $g \in F(F, G)$.

- 1) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
- 2) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Exercice n°6

Soit E et F deux ensembles.

- 1) Montrer que $F \subset E \iff E \cap F = F$.
- 2) Montrer que $F \subset E \iff E \cup F = E$.

Exercice n°7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On pose $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- 1) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- 2) Déterminer la fonction indicatrice de $A \Delta B$ en fonction de la somme et du produit de celles de A et de B .
- 3) En déduire que $A \Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

Exercice n°8

Soit A une partie d'un ensemble E et f une application de E dans F :

- 1) Montrer l'inclusion $f(E) \setminus f(A) \subset f(\overline{A})$.
- 2) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- 3) Soit B une autre partie de F . Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$, puis que $f(f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$.

Exercice n°9

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Décrire $\mathcal{P}(E)$.

Exercice n°10

Soit A une partie de E , et $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, $X \mapsto X \cap A$.

- 1) Montrer que f est injective si et seulement si $A = E$.
- 2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A = E$.

Exercice n°11

Soit f définie de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

- 1) Est-ce que f est injective ?
- 2) Est-ce que f est surjective ?

Exercice n°12

Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$ (on fera la distinction entre $\{1\}$ et $\{\{1\}\}$).

Exercice n°13

Quelle est la différence entre $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$?

Exercice n°14

Soit h réel strictement positif. On pose $J_h =]-h; h[$.

- 1) Montrer que $\bigcap_{h \in \mathbb{R}^{*+}} J_h = \{0\}$.
- 2) Montrer que $\bigcup_{h \in \mathbb{R}^{*+}} J_h = \mathbb{R}$.

Exercice n°15

Soit f une application de E dans F , $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F . Montrer que :

- 1) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- 2) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

Première année classe préparatoire INP des Hauts-de-France, lycée Fénélon Cambrai — M. Calciano