Chapitre 13 : Espaces vectoriels

I. Généralités

1) Définition

Soit E un ensemble non vide, muni de deux lois : l'une de composition interne notée « + », et l'autre de composition externe notée « . »
Ainsi, + :E×E→E et la loi . $\varkappa$ ×E→E

On dit que le triplet (E,+,.) définit un espace vectoriel sur le corps $\varkappa$ (à notre niveau $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) ou encore qu'il définit un $\varkappa$-espace vectoriel si :

(E,+) est un groupe abélien (on note 0_E l'élément neutre)
Pour tout λ, μ de $\varkappa$, pour tout x de E : $\lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$
Pour tout λ, μ de $\varkappa$, pour tout x de E : $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
Pour tout λ de $\varkappa$, pour tout x,y de E : $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
Pour tout x de E, $1_\varkappa.x = x$

Remarque : Lorsqu'on a un $\varkappa$-espace vectoriel, les éléments x de E sont appelés vecteurs, et les λ de $\varkappa$ sont les scalaires.

2) Règles de calculs

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, pour tout x de E, et λ de $\varkappa$:
On a: $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_\varkappa$ *ou* $x = 0_E$
On a : $(-1_\varkappa).x = -x$

Exemple :
Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$, 2(1,1,0) + (1,1,1) =(3,3,1)
Remarque : on peut dire alors que (3,3,1) est combinaison linéaire des vecteurs (1,1,0) et (1,1,1)

3) Produit cartésien

Soit E et F deux $\varkappa$-espaces vectoriels, alors **E×F** est un $\varkappa$-espace vectoriel

Démonstration : Il suffit de vérifier toute l'axiomatique…

Exemple : ($\mathbb{R}^2$,+, .) est ainsi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puisque $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et que ($\mathbb{R}$,+, .) est ainsi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel !

4) Sous-espace vectoriel

Soit E $\varkappa$-espace vectoriel, F une partie de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

F est non vide ou de façon équivalente, si 0_E appartient à F
Et : $\forall (x, x') \in F^2, \forall \lambda \in \varkappa, \lambda.x + x' \in F$

Exemple : $\varkappa$[X] est un $\varkappa$-espace vectoriel, et $\varkappa_n$[X] est un *sous* espace vectoriel de $\varkappa$[X].

En effet : $0 \in \varkappa_n[X]$, soit $\lambda \in \varkappa$, soit $(P,Q) \in \varkappa_n[X]^2$, $\lambda P+Q$ est bien un polynôme dont le degré maximal est n, donc $\lambda P+Q \in \varkappa_n[X]$

Remarque : Il est beaucoup moins fastidieux de démontrer qu'un ensemble a une structure de $\varkappa$-espace vectoriel, en démontrant qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel « connu »

Exercice :
Les ensembles $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y + 3z = 1\}$ et $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(1)\}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels respectivement de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}[X]$?

5) Intersection de sous-vectoriels
Soit : $(Fi)_{i\in I}$ une familles de sous-espaces vectoriels d'un $\varkappa$-espace vectoriel E
Alors : $\bigcap_{i\in I}(Fi)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :
Pour tout i, $O_E \in Fi$, *puisque ce sont des sev de E, donc* $O_E \in (Fi)_{i\in I}$
soit $\lambda \in \varkappa$, $(x,y) \in \bigcap_{i\in I}(Fi)$, *pour tout i,* $\lambda x+y \in F_i$, *donc* $\lambda x+y \in \bigcap_{i\in I}(Fi)$

6) Somme de sous-espaces vectoriels
Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un même $\varkappa$-espace vectoriel E.
On note F+G l'ensemble de tous les vecteurs de E somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
Ainsi : $F+G = \{x+y, x\in F, y \in G\} = \{v\in E / \exists (x,y) \in F\times G, v=x+y\}$

Exemple :
Démontrer que si F et G deus sous espaces vectoriels d'un même $\varkappa$-espace vectoriel E alors F+G est un sous espace vectoriel de E.

7) Sous espaces supplémentaires
a) définition
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, on dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si :
$E = F+G$
$F\cap G = \{0_E\}$
On note alors : $E = F\oplus G$

b) caractérisation

Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E

E= F⊕G si et seulement si $\forall v \in E, \exists! (x,y) \in E^2 \, tels\ que : \begin{cases} v = x + y \\ x \in F \\ y \in G \end{cases}$

Exercice : Faire la démonstration !

8) Somme d'un nombre fini de sous espaces
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, $F_1 \ldots F_p$ des sous-espaces vectoriels de E
On note $F_1+\ldots+F_p$ l'ensemble de toutes les sommes $x_1+\ldots+x_p$ avec $(x_1,\ldots,x_p)$ décrivant l'ensemble $F_1\times \ldots \times F_p$

9) Sous-espaces vectoriels engendrés
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel
Etant donné une famille $(x_1,\ldots,x_p)$ de vecteurs de E, on appelle combinaison linéaire des vecteurs $x_1,\ldots x_p$ toute expression de la forme : $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \varkappa^p$

Définition : Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, et A une partie de E.
On appelle sous espace vectoriel engendré par A, et on note vect(A), l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A.
Vect(A) est le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant A.

Exemples :
#Soit u un élément quelconque de E, l'ensemble Vect(u) = {λu | λ ∈ K} est le sous-espace vectoriel de E engendré par u. Il est souvent noté Ku. Si u n'est pas le vecteur nul, on parle d'une *droite vectorielle.*

Si u et v sont deux vecteurs de E, alors Vect(u, v) = { λu + μv | λ, μ ∈ K} . Si u et v ne sont pas colinéaires, alors Vect(u, v) est un *plan vectoriel*.

Exercice :
1) Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$.
2) A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1+X, X, X^2)$?

II. Cas de la dimension finie

1) Définitions
Soit E un espace vectoriel, et $F = (x_1,\ldots,x_p)$ une famille de p vecteurs de E.
-On dit que F est **une famille génératrice** de E si $\mathrm{Vect}((x_1,\ldots,x_p)) = E$
Ainsi : Si $\forall x \in E, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \varkappa^p$ tels que $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$

-On dit que F est **une famille libre** si la seule combinaison linéaire des vecteurs $x_1 \ldots x_p$ donnant le vecteur nul est la combinaison dont tous les coefficients sont nuls.
Ainsi $\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \varkappa^p$ tels que $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$
Dans le cas contraire, **on dit que la famille est liée**.

- On dit que F est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exercice
1) Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x = 2t \text{ et } z = 3y\}$.
Montrer que E=Vect((2, 0, 0, 1) ;(0, 1, 3, 0)), en déduire que E est un sev de $\mathbb{R}^4$.

2) Montrer que la famille ((2, 1),(−1, 3),(0, 2)) est liée dans $\mathbb{R}^2$.

2) Théorème dit de caractérisation des bases
Soit E un espace vectoriel, B = (e_1,…,e_p) une famille de vecteurs de E, alors **B est une base si et seulement si** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \exists! \, (\boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_p}) \in \boldsymbol{\varkappa^p} \setminus \mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda_1 e1} + \dots + \boldsymbol{\lambda_p e}\mathbf{p}$

Remarque : Dans ce cas, les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ s'appellent *les coordonnées de x.*

Démonstration :
Soit B = (e_1,…,e_p) une base de E, soit x∈ E, comme B est génératrice, alors $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \varkappa^p$ *tels que* $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$

Réciproquement, supposons que $\forall x \in E, \exists! \, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \varkappa^p$ *tels que* $x = \lambda_1 e1 + \dots + \lambda_p ep$*. Clairement B est une famille génératrice.*
Est-elle libre ?
Si $\lambda_1 e1 + \dots + \lambda_p ep = 0$*, comme* $0e1 + \dots + 0ep = 0$ *et par unicité de* $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \varkappa^p$*, on en déduit que* $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

Exercice :
Soit E = $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la famille G = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) définie par : $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$, $P_3(X) = X^3 + 1$, $P_4(X) = 1 + X^2$, $P_5(X) = X - X^3$
Montrer que (P1, P2, P3, P4) forme une base de E
Donner les coordonnées de P_5 dans cette base.

3) Définition
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Exemple :
$\mathbb{R}[X]$: l'ev des polynômes à coefficients réels n'est pas de dimension finie
$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

4) Théorème de la base incomplète
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension finie,

-Soit L une famille libre de E, alors il existe une base B de E comportant un nombre fini de vecteurs telle que L⊂B

-Soit G une famille génératrice de E, alors il existe une base B de E comportant un nombre fini de vecteurs telle que : B⊂G

5) Cardinaux
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit L une famille libre et G une famille génératrice dans E alors : card(L)≤card(G)

6) Proposition (admise)
Tous les espaces vectoriels de dimension finie admettent des bases.
Pour un espace vectoriel de dimension finie donné, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on appelle dimension de E, le nombre commun de vecteurs de toutes les bases de E.

Cet entier est noté dim E.

7) Familles de vecteurs en dimension finie

a) Familles libres et génératrices en dimension finie
Soit E un espace vectoriel de dimension n
Soit F = $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille de p vecteurs de E

Alors : Si F est libre, on a : $p \leq n$
Alors : Si F est génératrice, on a : $n \leq p$

Alors : si $p<n$, F n'est pas génératrice
Alors si $p>n$, F est liée.

b) Soit F = $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie, on dit que :
- F est libre maximale si est libre et de cardinal n
- F est génératrice minimale si F est génératrice et de cardinal n

c) Théorème
Soit F = $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors :
-si F est une base de E, $p = n$
-si $p = n$, F est une base de E$\Leftrightarrow$ F est libre $\Leftrightarrow$ F est génératrice de E

Ainsi : F est une base si et seulement F est libre maximale ou F génératrice minimale

8) Calculs sur les dimensions

a) Dimension des sous-espaces
Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension finie, soit $F \subset E$ un sous-espace de E alors $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

b) Formule de Grassmann
Soit F et G deux sous-espaces d'un espace de dimension finie, alors :
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration :
Soit S un supplémentaire de $F \cap G$ dans G, on a $G = S \oplus (F \cap G)$
Montrer alors que $F+G = S \oplus F$

c) Espaces supplémentaires
Soient F et G deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie, alors
F et G sont supplémentaires si et seulement si $\begin{cases} \boldsymbol{F \cap G = \{\vec{0}\}} \\ \mathbf{dim}\, \boldsymbol{F} + \mathbf{dim}\, \boldsymbol{G} = \mathbf{dim}\, \boldsymbol{E} \end{cases}$

Démonstration :

Si F et G deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie, alors E = F+G, et $F \cap G = \{0\}$.

$Dim(E) = dim(F)+dim(G) - dim(F \cap G) = dim(F)+dim(G)$

Remarque : Ainsi, si E est de dimension finie alors les propositions suivantes sont

équivalentes :

- $E = F \oplus G$
- $E = F+G$ et $F \cap G = \{0_E\}$
- $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
- $E = F+G$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

d) Proposition

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces de E alors : $\dim(F_1 + \dots + F_p) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

Avec égalité si et seulement si la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe.

Démonstration : Par récurrence sur p

Pour p = 2, la formule de Grassmann donne : $\dim(F_1+F_2) = \dim(F_1)+\dim(F_2)-\dim(F_1 \cap F_2)$, donc $\dim(F_1+F_2) \leq \dim(F_1)+\dim(F_2)$ avec égalité ssi $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$, c'est-à-dire ssi $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

e) Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\varkappa$. On sait déjà que $E \times F$ est un espace vectoriel, il est en plus de dimension finie et **$\dim(E \times F) = \dim(E) \times \dim(F)$**

Remarque : Si L(E,F) désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F, alors l'espace L(E,F) est de dimension finie et sa dimension est : $\dim(E) \times \dim(F)$, mais cette formule sera vue dans un prochain chapitre.

Démonstration : Elle sera faite dans le chapitre sur les matrices.

f) Rang d'une famille de vecteurs

Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

Exemple, pour une famille de vecteurs linéairement indépendants, son rang est le nombre de vecteurs.

Exercice :

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3).

Soit $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (0, 2, 1)$, $x_3 = (2, 6, 7)$ trois vecteurs de E et $F = (x_1, x_2, x_3)$. Déterminer le rang de la famille F et déterminer un supplémentaire G de Vect(F) dans E.